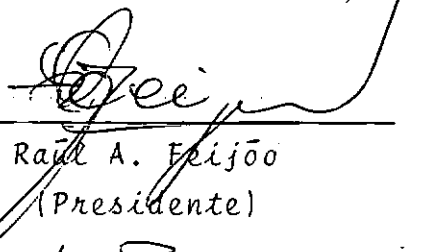


PRINCIPIOS VARIACIONALES Y SOLUCIONES NUMÉRICAS
EN ELASTO - VISCOPLASTICIDAD


Edgardo Taroco

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PAR
TE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

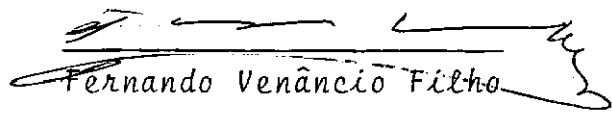
Aprovada por:



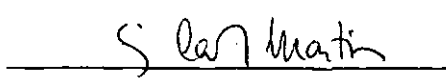
Raúl A. Feijó
(Presidente)



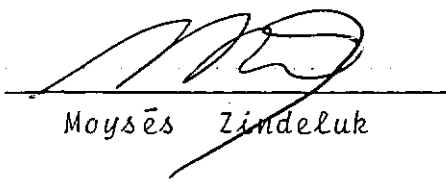
Luiz Bevilacqua



Fernando Venâncio Filho



Luiz Carlos Martins



Moysés Zindeluk

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

A Raquel, Ana y Syra

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Cálculo del Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas y los resultados numéricos obtenidos en el Grupo de Processamento de Dados de dicho Centro.

Para su realización tuvieron importancia fundamental los cursos y seminarios a que asistí en COPPE y la permanencia en el grupo de investigadores GRADCON del Programa de Ingeniería Mecánica de COPPE.

Mi especial reconocimiento a:

Raúl A. Feijóo, con quien realicé este trabajo, por su dedicación y ayuda;

Luis Bevilacqua, que además de orientar nuestras actividades en el Programa de Ingeniería Mecánica de COPPE, continúa brindándonos apoyo y estímulo;

Luis Carlos Martins, por los comentarios y sugerencias efectuadas durante las reuniones de la II Escola de Matemática Aplicada, en la cual fue incluido este trabajo como tema;

y Alejandra Rotania de Pozzi y Maria da Conceição Franco da Silveira que tuvieron a su cargo la dactilografía y los dibujos.

RESUMO

Neste trabalho se estuda inicialmente o modelo viscoplástico, analisando suas propriedades e mostrando como a partir de leis constitutivas viscoplásticas é possível se obter correspondentes leis plásticas e de creep secundário.

Posteriormente formula-se o problema de valor de contorno em elasto/viscoplasticidade dentro da teoria de deformações infinitesimais, para processos quasi estáticos e se deduzem os princípios variacionais correspondentes.

Apresenta-se um algoritmo numérico baseado no Método de Elementos Finitos para aproximação espacial e no Método de Euler para a integração no tempo.

Finalmente, empregando o algoritmo anterior, obtêm-se soluções aproximadas em problemas de plasticidade, creep secundário e elasto/viscoplasticidade.

RESUMEN

En este trabajo se estudia en primer término el modelo viscoplástico , analizando sus propiedades y mostrando como a partir de leyes constitutivas viscoplásticas es posible obtener correspondientes leyes plásticas y de creep secundario.

Posteriormente se formula el problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad dentro de la teoría de deformaciones infinitesimales, para procesos cuasi-estáticos y se deducen los principios variacionales correspondientes.

Se presenta un algoritmo numérico basado en el Método de Elementos Finitos para la aproximación espacial y en el Método de Euler para la integración en el tiempo.

Finalmente empleando el algoritmo anterior se obtienen soluciones aproximadas en problemas de plasticidad, creep secundario y elasto/viscoplasticidad.

SUMMARY

In the first part of this work a viscoplastic model is studied and it is shown how the viscoplasticity theory can be used not only to model this behavior but also to model plasticity as well as creep.

The mixed-initial boundary value problem in elasto/viscoplasticity is presented for the case of quasi-static isothermal process and infinitesimal deformations. Different variational formulations related to the above boundary value problem are also deduced.

A numerical algorithm based on the Finit Element Method and the Euler's Method, for the spacial and time discretizations respectively is presented.

The algorithm is then used to obtain approximate solutions in elasto-plasticity, secondary creep and elasto/viscoplasticity problems.

INDICE

	Páginas
Introducción	
Capítulo I. Plasticidad	4
I.1. Comportamiento plástico de materiales en estados simples de tensión	5
I.2. Generalización para estados múltiples de tensión	11
I.3. Ecuaciones constitutivas en elastoplas- ticidad	19
I.4. Algunas funciones de fluencia	23
I.5. Algunos problemas simples de valor de contorno en elasto-plasticidad ideal...	30
I.6. Formulaciones variacionales en elasto - plasticidad	40
Capítulo II. Creep estacionario	46
II.1. Deformación de creep en tensión uniaxial	48
II.2. Ley asociativa de von MISES-ODQVIST ...	52
II.3. Ley asociativa de TRESCA	61
II.4. Ley no asociativa de von MISES-TRESCA..	64
II.5. Generalización de la ley constitutiva..	67
II.6. Problema de valor de contorno en creep secundario	70
II.7. Ejemplos de aplicación	72
II.8. Principios variacionales en creep	89
Capítulo III. Viscoplasticidad	103

	Páginas
III.1. Material tipo BINGHAM	105
III.2. Ley constitutiva de HOHENEMSER y PRAGER	110
III.3. Ley constitutiva de PERZYNA	124
III.4. Obtención de las leyes constitutivas de plasticidad ideal	140
III.5. Obtención de las leyes de creep secundario como casos particulares de viscoplasticidad	145
III.6. Generalización de la ley viscoplastica de PERZYNA	148
III.7. Problema de valor de contorno en viscoplasticidad estacionaria ...	152
III.8. Ejemplo de aplicación	154
Capítulo IV. Elasto/viscoplasticidad	160
IV.1. Ley constitutiva en elasto/viscoplasticidad	163
IV.2. Problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad	171
IV.3. Ejemplo de aplicación	173
IV.4. Principio de la potencia virtual	182
IV.5. Principio de mínima energía potencial	184
IV.6. Principio de la potencia virtual complementaria	188
IV.7. Principio de mínima energía potencial complementaria	190
IV.8. Funcional de tres campos	194
IV.9. Funcional de dos campos de HELLIN	

	Páginas
GER-REISSNER.....	196
Capítulo V. Soluciones aproximadas en elasto/visco plasticidad.....	201
V.1. Aproximación espacial por el Método de Elementos Finitos del problema varia - cional en elasto/viscoplasticidad.....	202
V.2. Aproximación espacial del funcional de energía y del principio de la potencia virtual	204
V.3. Aproximación espacial del funcional de Hellinger-Reissner	206
V.4. Aproximación en el tiempo	209
V.5. Algoritmo numérico en elastoplastici - dad	212
V.6. Algoritmo numérico en creep secundario	214
V.7. Aplicaciones numéricas	215
Bibliografía	242

INTRODUCCION

El empleo industrial de materiales que bajo ciertas condiciones de carga, temperatura o radiación presentan comportamiento inelástico ha sido una de las características marcantes de las últimas décadas.

A efectos de simplificar el análisis y compren-der mejor el comportamiento inelástico de los materiales , la metodología empleada ha sido la de idealizar modelos en los que solamente está presente la propiedad que se quiere estudiar.

Dentro de este esquema surgieron cronologicamente al final del siglo pasado el primer modelo de plasticidad , a principios de este siglo el modelo de creep y más recientemente el modelo viscoplástico. A partir de cada uno de ellos se desarrollaron paralelamente las correspondientes teorías creando sus propios métodos tanto en la investigación como en el análisis de los problemas.

Dichas teorías se basan en hipótesis que si bien simplifican el tratamiento de los problemas limitan a la vez sus respectivos campos de aplicación.

Así, por ejemplo, las hipótesis simplificativas de la plasticidad en que se admite que los procesos de deformación son independientes de la velocidad hace imposible que dentro de esta teoría se puedan llevar en cuenta fenómenos viscosos.

El modelo viscoplástico analizado en este trabajo tiene la ventaja que además de permitir llevar en cuenta si

multaneamente propiedades plásticas y viscosas de los materiales en el límite puede aproximar tanto plasticidad como creep secundario. Mediante formulaciones variacionales y algoritmos numéricos más simples que a los que se arriba cuando se estudia cualquiera de ambas teorías separadamente, es posible obtener soluciones en elastoviscoplasticidad, creep secundario y elastoplasticidad.

En el Capítulo I se resumen algunos aspectos fenomenológicos de la Teoría de la Plasticidad. Comenzándose por el análisis de las propiedades de los materiales en ensayos simples, y su posterior generalización para obtener las ecuaciones constitutivas correspondientes a estados complejos de tensión. Se presenta el problema de valor de contorno y cómo arribar a formulaciones variacionales equivalentes donde la incógnita principal es la velocidad y la velocidad de la tensión.

En el Capítulo II se analiza el problema de creep dando énfasis al caso de creep secundario mostrando cómo evolucionaron las leyes constitutivas de modelos uniaxiales a modelos triaxiales.

Posteriormente a presentar el problema de valor de contorno en creep secundario, se hace uso de las propiedades de convexidad de los potenciales de creep para arribar a principios variacionales de mínimo, discutiéndose también el problema de unicidad de la solución.

En el Capítulo III se presenta el modelo viscoplástico y su evolución en los últimos años. Se analizan también algunas leyes particulares y se muestra como correspondientes leyes de creep secundario y plasticidad pueden deri -

varse a partir de viscoplasticidad.

En el Capítulo IV se emplean los modelos introducidos en el capítulo anterior para formular las leyes constitutivas y el problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad.

Se muestra también como deducir los principios variacionales de mínimo y los correspondientes funcionales de dos y tres campos.

En el Capítulo V se muestra cómo arribar al esquema numérico mediante el funcional de mínima energía potencial conjuntamente con la aproximación espacial obtenida via Elementos Finitos y la aproximación en el tiempo mediante el Método de Euler.

Finalmente se comparan soluciones exactas obtenidas en ejemplos simples de elastoplasticidad, creep secundario y elasto/viscoplasticidad con las correspondientes soluciones numéricas aplicando el algoritmo elasto/viscoplástico.

CAPITULO I

PLASTICIDAD

Para determinados niveles de carga, el comportamiento de numerosos materiales puede predecirse con bastante exactitud mediante el empleo de la Teoría de la Elasticidad. Sin embargo cuando las cargas superan dichos valores, conocidos como límites elásticos, luego de la descarga permanecen deformaciones residuales denominadas deformaciones plásticas.

Con el auge en el siglo pasado del empleo estructural del acero donde se hacen presentes sus propiedades elasto-plásticas, comenzó el estudio por parte de investigadores de los fenómenos plásticos.

Entre ellos cabe destacarse TRESCA que en 1864 introdujo la función de fluencia que lleva su nombre, SAINT VENANT que propuso leyes constitutivas para estados planos y LEVI que generalizó las expresiones de SAINT VENANT para problemas tridimensionales.

A comienzos de este siglo, en 1913, von MISES formula el criterio de plasticidad que lleva su nombre. Posteriormente Prandtl en 1924 incorpora las deformaciones elásticas en problemas planos y Reuss en 1930 generaliza las ideas anteriores para el caso tridimensional.

En los últimos años la plasticidad ha atraído la atención de una amplia gama de investigadores tanto interesados en los aspectos matemáticos, como en la formulación de nuevas ecuaciones constitutivas y aplicaciones de la teoría de la plasticidad a problemas que el desarrollo tecnológico demanda.

En este capítulo se comienza analizando el comportamiento de los materiales plásticos para estados de tensión simple. Posteriormente se generalizan los conceptos anteriores para obtener las ecuaciones constitutivas en elastoplasticidad para estados complejos de tensión.

Si bien existen otros caminos para postular las ecuaciones constitutivas, se escogió el anterior, puesto que con él se da énfasis al aspecto mecánico que estamos interesados en resaltar. Se presentan casos particulares de la función de fluencia y sus correspondientes leyes plásticas.

Luego de estudiar las leyes constitutivas se formula el problema de valor de contorno en elastoplasticidad y se dan ejemplos simples en los que es posible obtener soluciones exactas.

Finalmente, haciendo uso de las propiedades de las leyes constitutivas plásticas se muestra cómo arribar a los principios variacionales de mínimo en velocidades de deformación y tensión respectivamente.

I.1. Comportamiento plástico de materiales en estados simples de tensión.

Comenzaremos nuestro estudio observando el comportamiento mecánico de los materiales cuando sometidos a un estado de tensión homogéneo simple.

Un ejemplo clásico de lo anterior es el caso de barras ensayadas a tracción, donde es posible efectuar mediciones experimentales.

El resultado de los ensayos es representado en un diagrama tensión deformación (T_{11} , E_{11}) donde T_{11} es conocida como tensión nominal y corresponde a la tensión en una probeta referida a la sección transversal inicial y E_{11} es la deformación específica relativa a la longitud inicial.

Si la barra ensayada es de acero conformado en frío o una aleación de aluminio, la relación tensión deformación tiene en este caso la forma indicada en la figura I.1.

La relación tensión deformación es inicialmente lineal y a partir de un valor T_{11}^A (tensión de proporcionalidad) la pendiente de la curva decrece monotonamente hasta alcanzar la falla, después de pasar por un valor máximo de T_{11} .

La determinación de la tensión de fluencia T_{11}^Y en este caso está asociada a la sensibilidad de las máquinas de ensayo para detectar deformaciones permanentes. Generalmente se adoptan criterios estandarizados que establecen que

T_{11}^Y es la tensión para la cual corresponde una deformación permanente previamente estipulada.

De acuerdo a la forma del diagrama tensión deformación los materiales se clasifican en dúctiles cuando son posibles deformaciones significativas después de alcanzar la tensión T_{11}^Y y frágiles en caso contrario. figura I.1.

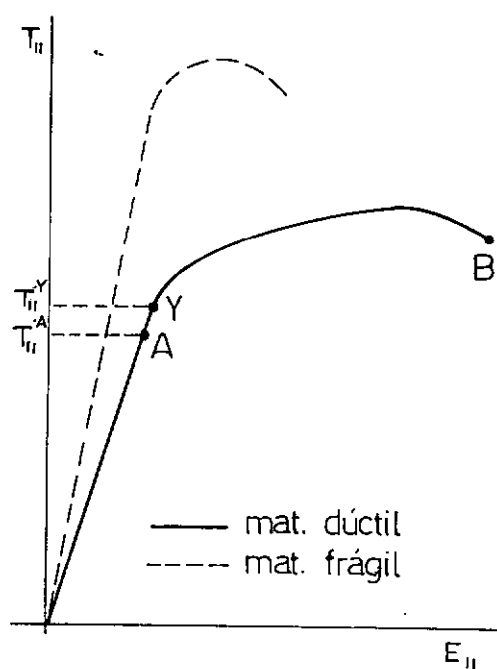


fig.I.1.

A seguir veremos qué sucede con el ensayo de tracción cuando cargamos y posteriormente descargamos la barra. Si sometemos nuestra barra a un proceso en que la carga aplicada crece continuamente hasta un valor y luego decrece hasta el valor cero, según el nivel de carga el comportamiento será diferente. Si la descarga se inicia antes de alcanzar el valor T_{11}^Y , la barra retorna a su configuración inicial. Sin embargo, si el valor de T_{11}^Y es superado y descargamos la barra, observamos que la pendiente de la curva descarga es sensiblemente idéntica a la pendiente inicial de la curva $T_{11}-E_{11}$ y que la barra no vuelve a su configuración inicial. figura I.2.a. La presencia de esta deformación permanente es una de las características fundamentales que permiten distinguir la plasticidad de la elasticidad.

Si terminando el proceso anterior en que T_{11} crece monotonamente hasta T_{11}^A y luego decrece monotonamente hasta el valor cero (punto C. figura I.2.a), procedemos a cargar nuevamente la barra, la pendiente de la curva de carga CD es sensiblemente idéntica a la pendiente inicial de $T_{11}-E_{11}$. Como se puede observar en la figura, se produce un pequeño ciclo de histeresis y si el proceso de carga continúa más allá del punto Y', se tiene una curva idéntica a la curva $T_{11}-E_{11}$ obtenida a partir del punto A por un proceso de carga.

Por lo tanto la interrupción de la curva monótona de carga por una descarga afecta muy poco las subsecuentes deformaciones. También cuando las cargas no son cíclicas es común desprestigiar el ciclo de histeresis como también las pequeñas diferencias en las deformaciones existentes en las proximidades de los puntos de descarga. Con estas suposiciones la curva carga

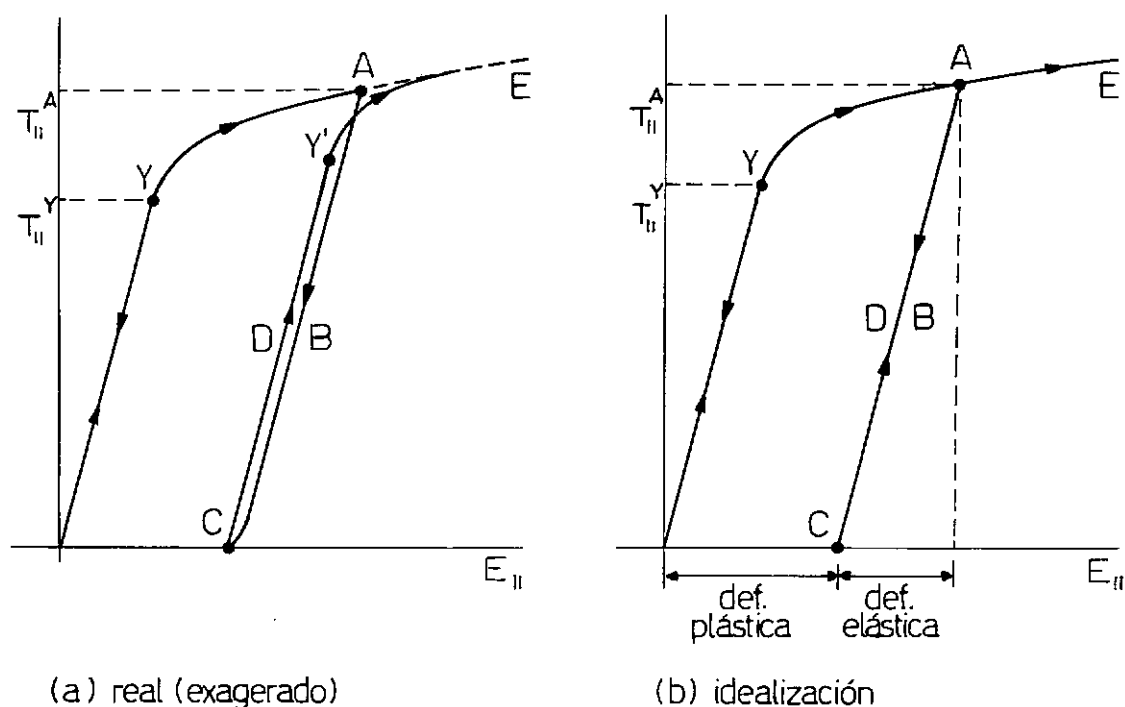


fig.I.2.

y descarga $T_{II} - E_{II}$ idealizada resulta la de la figura I.2.b.

Otros materiales tales como el acero dulce para de terminado rango de deformación, se comportan en un ensayo de tracción simple como indica la figura I.3.

A los materiales que presentan este tipo de comportamiento se les denomina *plásticos ideales* en contraposición a los anteriormente descritos que se les conoce como *plásticos con endurecimiento*.

De los resultados de los ensayos de los materiales que denominamos plásticos con endurecimiento surgen las siguientes observaciones:

- 1) El nivel de tensiones T_{II} no es suficiente para de finir el estado de deformación E_{II} . A un mismo va

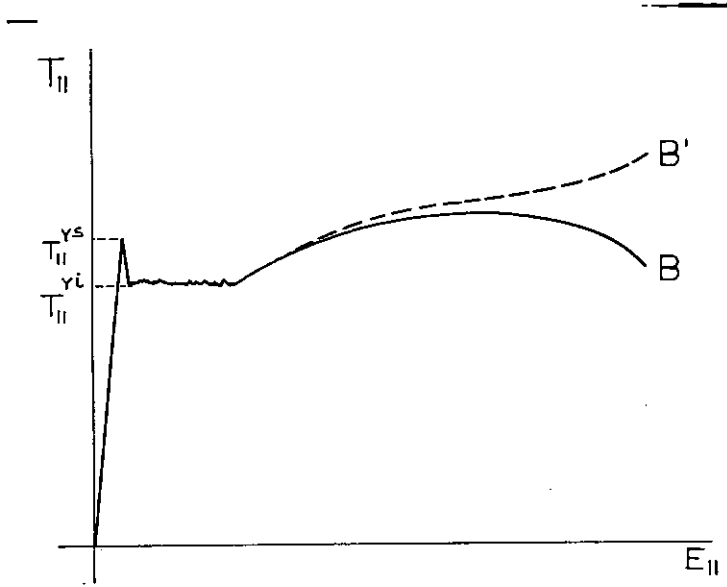


fig.I.3.

lor T_{11} le pueden corresponder diferentes valores de E_{11} según las veces que el material fue cargado y descargado figura 1.2.y 3. (Dependencia de la historia).

- 2) La relación entre T_{11} y E_{11} tanto en un proceso de carga como de descarga no depende de la velocidad con la cual se realiza dicho proceso (Independencia respecto a la velocidad del proceso).
- 3) En el estado inicial del material existe un valor denominado tensión de fluencia T_{11}^Y que limita el comportamiento elástico. Si el nivel de tensión T_{11} verifica que $T_{11} < T_{11}^Y$ cualquier modificación de la carga o descarga $\pm dT_{11}$ produce deformación exclusivamente elástica.
- 4) Si en el estado T_{11} , coincidente con la tensión $\underline{11}$

mite $T_{11} = T_{11}^Y$, disminuimos la tensión en dT_{11} , el material se comporta elásticamente y si aumentamos la tensión en dT_{11} recorremos la curva tensión deformación en dirección creciente.

Al alcanzar un nuevo punto en la curva esfuerzo deformación, tenemos dos posibilidades, aumentar la carga y por consiguiente continuar recorriendo la curva esfuerzo deformación o disminuirla con lo que se produce un proceso elástico.

- 5) El límite elástico inicial del material T_{11}^Y se modifica cuando luego de haber alcanzado la tensión de fluencia inicial se produce un proceso de carga.
- 6) El comportamiento del material se modifica toda vez que se producen deformaciones plásticas. Lo anterior lo caracterizamos diciendo que el material depende de la historia.
- 7) Existen en el diagrama tensión deformación dos zonas diferenciadas una de valores (T_{11}, E_{11}) inaccesible y una zona accesible que mediante la combinación de carga y descarga cualquier punto puede ser alcanzado. La curva límite de ambas regiones es el propio diagrama, que solamente puede ser recorrido cuando estando en él, se produce un proceso de carga.
- 8) Dado un estado (T_{11}, E_{11}) dentro de la región accesible siempre es posible descomponer la deformación E_{11} en la suma de:

$$E_{11} = E_{11}^e + E_{11}^p$$

donde $E_{11}^e = \frac{1}{E} T_{11}$, E módulo de elasticidad

De lo anterior se sigue que la deformación plástica E_{11}^p puede ser obtenida como la diferencia entre la deformación total y la deformación elástica. $E_{11}^p = E_{11} - E_{11}^e$. Resultando la deformación plástica igual a la deformación total cuando la tensión se anula o sea cuando se descarga la barra.

I.2. Generalización para estados múltiples de tensión.

Con las propiedades enumeradas anteriormente procederemos a construir la estructura general de las ecuaciones constitutivas de la plasticidad para estados complejos de tensión de deformación. Esta generalización deberá preservar las características esenciales observadas en el comportamiento de los materiales cuando sometidos a estados simples de tensión deformación^{1,3}.

En el caso de estados múltiples de tensión admitiremos que el estado en que se encuentra un punto está definido por la terna ordenada T, E^p, h donde T es el tensor de tensiones, E^p la deformación plástica y h un parámetro monótono creciente que mide la historia del proceso.

Estamos interesados a seguir en definir las características de un material plástico mediante el establecimiento de⁴:

- a) Un criterio inicial de fluencia que permita individualizar la transición inicial entre comportamiento elástico y plástico.
- b) La forma en que dicho criterio inicial se modifica en fun-

ción de la historia.

- c) Y las leyes constitutivas que permitan definir para cada punto T, E^P, h y para cada incremento de carga dT el correspondiente incremento de deformación plástica. dE^P .

Comenzaremos estableciendo las características de los procesos que pueden ser realizados en un material elastoplástico. Para ello generalizaremos los conceptos establecidos en el caso de una dimensión, admitiendo que en el espacio T, E^P, h es posible distinguir dos zonas, una de estados accesibles y otra de estados inaccesibles⁵. Para ello introducimos una función $f = f(T, E^P, h)$ denominada función de fluencia que nos permite definir ambas regiones:

$$\begin{aligned} f(T, E^P, h) &\leq 0 && \text{región accesible} \\ f(T, E^P, h) &> 0 && \text{región inaccesible} \end{aligned}$$

En el estado inicial $E^P = 0$ y $h = 0$ la función de fluencia nos permite definir también la región elástica y la condición inicial de fluencia:

$$\begin{aligned} f(T, 0, 0) &\leq 0 && \text{región elástica} \\ f(T, 0, 0) &= 0 && \text{condición inicial de fluencia} \end{aligned}$$

Si estamos en un punto del contorno de la región elástica inicial $f(T, 0, 0) = 0$ y realizamos un proceso de carga, nos movemos sobre la superficie de fluencia hasta alcanzar un nuevo estado $f(T, E^P, h) = 0$, al igual que en el caso uniaxial que nos movíamos sobre la curva experimental.

Para una historia fija (\bar{E}^P, \bar{h}) constantes, la condi-

ción $f(T, \bar{E}^P, \bar{h}) \leq 0$ nos determina en el espacio de tensiones la región elástica.

Analizaremos a seguir los diferentes procesos que se pueden realizar cuando se está en un punto de la región elástica $f(T, \bar{E}^P, \bar{h}) \leq 0$.

Si el punto es interior a la región, $f(T, \bar{E}^P, \bar{h}) < 0$, cualquier proceso dT no modifica los valores de \bar{E}^P y \bar{h} , por lo que se dice que el proceso tanto en carga como en descarga es elástico.

$$f(T+dT, \bar{E}^P, \bar{h}) < 0$$

Si el punto está en la superficie de fluencia $f(T, \bar{E}^P, \bar{h}) = 0$ pueden suceder tres posibilidades cuando se modifica la tensión T en un valor dT .

a) *Proceso de descarga.* En este proceso la historia permanece constante ($d\bar{E}^P = 0$, $d\bar{h} = 0$) y $f(T+dT, \bar{E}^P, \bar{h}) < 0$, luego se tiene que:

$$\left. \frac{df}{dT} \right|_{\bar{E}^P, \bar{h} = \text{Ctes}} = f_T \cdot dT < 0$$

b) *Proceso neutro.* Si bien la historia tampoco se modifica en este proceso, el nuevo estado $(T+dT, \bar{E}^P, \bar{h})$ permanece sobre la superficie de fluencia, es decir: $f(T+dT, \bar{E}^P, \bar{h}) = 0$, de donde resulta que:

$$\left. \frac{df}{dT} \right|_{\bar{E}^P, \bar{h} = \text{Ctes}} = f_T \cdot dT = 0$$

c) *Proceso de carga.* En estos procesos por definición la historia se modifica y el nuevo estado $(T+dT, \bar{E}^P+dE^P, \bar{h}+dh)$ permanece sobre la superficie de fluencia:

$$f(T+dT, \bar{E}^P+dE^P, \bar{h}+dh) = 0$$

y a su vez, los incrementos dT son tales que

$$f_T \cdot dT > 0.$$

Tendremos en cuenta lo anterior para dar la forma inicial a nuestra ley constitutiva.

Según fue observado, deformaciones plásticas sólo ocurren en procesos que modifican la historia. De acuerdo a la estructura que traemos, lo anterior puede expresarse matemáticamente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dE^P = 0 \quad \text{si} \quad & \begin{cases} f(T, E^P, h) < 0 \\ f(T, E^P, h) = 0, \quad f_T \cdot dT = 0 \end{cases} \\ dE^P \neq 0 \quad \text{si} \quad & f(T, E^P, h) = 0, \quad f_T \cdot dT > 0 \end{aligned}$$

por lo que se puede admitir que:

$$dE^P = \xi(T, E^P, h, dT)$$

En el caso particular que $dT = 0$ se verifica la condición $f_T \cdot dT = 0$, por tanto la función $\xi(\cdot)$ deberá ser tal que:

$$\xi(T, E^P, h, 0) = 0$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento plástico se caracteriza por ser independiente de la velocidad con que se realice

liza el proceso, la función $\xi(T, E^P, h, dT)$ deberá ser homogénea con respecto a la variable dT , es decir:

$$\xi(T, E^P, h, \lambda dT) = \lambda \xi(T, E^P, h, dT)$$

Lo anterior nos permite expresar la ecuación constitutiva en términos de derivadas respecto al tiempo de la deformación plástica y de la tensión:

$$\dot{E}^P = D^P = \xi(T, E^P, h, \dot{T})$$

Admitiendo que D^P es lineal en \dot{T} se sigue que:

$$D^P = \mathbb{K}(T, E^P, h) \dot{T}$$

donde \mathbb{K} es un tensor de cuarto orden función del estado (T, E^P, h) .

También fue observado que $dE^P(D^P)$ debe anularse en todo proceso neutro o sea cuando $f_T \cdot dT = 0$ ($f_T \cdot \dot{T} = 0$). Una manera simple de satisfacer lo anterior es admitir que la función \mathbb{K} tiene la forma:

$$\mathbb{K}(T, E^P, h) = \frac{1}{G} (g_T \otimes f_T)$$

donde $g = g(T, E^P, h)$ es la función potencial plástica y $G = G(T, E^P, h)$ es un escalar relacionado con el estado.

En efecto, aplicando la propiedad del producto tensorial se sigue que:

$$D^P = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T) \dot{T} = \frac{f_T \cdot \dot{T}}{G} g_T$$

I.2.1. Postulado de HILL y sus restricciones sobre la ley constitutiva plástica.

Así como en elasticidad es necesario realizar algunas hipótesis sobre el tensor de elasticidad para asegurar que las soluciones de problemas de valor de contorno en esta teoría sean bien comportadas (unicidad, etc), en plasticidad tendremos que introducir en las ecuaciones constitutivas una hipótesis conocida como *Principio del Trabajo Plástico Máximo de Hill*.

Este principio puede enunciarse como sigue:

Para una historia (\bar{E}^P, \bar{h}) y un incremento de deformación plástica dado $dE^P(D^P)$, la tensión asociada \bar{T} , $f(\bar{T}, \bar{E}^P, \bar{h}) = 0$, se distingue de todas las otras tensiones compatibles con la historia actual T^a , $f(T^a, E^P, h) = 0$, por la restricción que el trabajo plástico, $\bar{T} \cdot dE^P(\bar{T} \cdot D^P)$ durante dicho incremento sea el mayor de todos:

$$\bar{T} \cdot dE^P \geq T^a \cdot dE^P$$

El principio de trabajo máximo introduce restricciones en las ecuaciones constitutivas ya formuladas, que consisten en:

- 1) la región elástica $f(T, \bar{E}^P, \bar{h}) \leq 0$ es convexa.
- 2) $dE^P = d\lambda \dot{f}_T$ ($D^P = \dot{\lambda} \dot{f}_T$) donde $d\lambda \geq 0$

Introduciendo estas restricciones en la ley constitutiva se tiene que:

$$g \equiv f$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{f}_T \cdot \dot{T}}{G} = 0 \quad \text{para} \quad f = 0 \quad \text{y} \quad \dot{f}_T \cdot \dot{T} > 0$$

por lo que resulta $G > 0$.

I.2.2. Ecuaciones constitutivas para materiales idealmente plásticos.

En las secciones anteriores fue presentada la estructura general de la ecuación constitutiva en materiales con endurecimiento por deformación como así también, las restricciones impuestas por el Principio del máximo trabajo plástico sobre esta estructura.

En esta sección presentaremos la estructura de la ecuación constitutiva correspondiente a lo que hemos llamado materiales idealmente plásticos. Para ello consideraremos el comportamiento de un material idealmente plástico como un caso límite del comportamiento de un material con endurecimiento.

El comportamiento de un material idealmente plástico se caracterizaba por tener una curva tensión-deformación con un tramo horizontal, cuando sometido a un ensayo simple como el del ensayo de tracción de una barra (figura I.3).

Dentro de la estructura creada para materiales con endurecimiento, lo anterior equivale a decir que la superficie de fluencia es independiente de la historia recordada.

Diremos que un material es *idealmente plástico* o *perfectamente plástico* si la función de fluencia f es independiente de la historia recordada.

De esta manera la región elástica $f = f(T) \leq 0$ define los posibles (accesibles) estados de tensión que un punto material puede alcanzar cuando sometido a algún proceso. La región

$f(T) > 0$ define los estados de tensión que no podrán ser alcanzados (inaccesibles) por ningún proceso.

Notamos así una diferencia sustancial entre materiales idealmente plásticos y materiales con endurecimiento. En estos últimos, estados exteriores a la región elástica pueden ser alcanzados a través de algún proceso que modifique la historia.

La determinación de la forma de la ecuación constitutiva para materiales idealmente plásticos, es conveniente realizarla considerándola un caso límite de las ecuaciones constitutivas para materiales con endurecimiento⁵. En efecto, consideremos un material con endurecimiento, luego la función de fluencia es de la forma:

$$f = f(T, cE^P, ch)$$

donde c es un escalar positivo. Estudiando las ecuaciones constitutivas para este material cuando $c \rightarrow 0$, arribamos a las ecuaciones constitutivas (ley asociativa) para un sólido idealmente plástico¹:

$$D^P = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f(T) < 0 \\ 0 \text{ si } f(T) = 0 \text{ y } f_T \cdot \dot{T} < 0 \end{array} \right.$$

$$D^P = \dot{\lambda} f_T \quad \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y} \quad f_T \cdot \dot{T} = 0$$

donde $\dot{\lambda} \geq 0$ es indeterminado.

I.3. Ecuaciones constitutivas en elasto-plasticidad.

Presentaremos aquí las ecuaciones constitutivas para un material elastoplástico. Las mismas son obtenidas a partir de los resultados alcanzados en secciones anteriores.

De la misma forma que en el ensayo uniaxial descomponíamos la deformación total en una parte plástica y otra elástica ($E_{11} = E_{11}^e + E_{11}^p$), en nuestra generalización tendremos:

- . El tensor velocidad de deformación D se descompone en:

$$D = D^e + D^p$$

- . La parte elástica de la velocidad de deformación está relacionada con T a través de:

$$\dot{T} = D D^e, \quad D^e = D^{-1} \dot{T}$$

- . La parte plástica D^p está definida por:

i) *Materiales con endurecimiento.*

$$D^p = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T, E^p, h) < 0 \\ 0 \text{ si } f(T, E^p, h) = 0 \text{ y } f_{T \cdot} \dot{T} \leq 0 \end{cases}$$

$$D^p = \dot{\lambda} f_T = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T) \dot{T} \quad \begin{aligned} &\text{si } f(T, E^p, h) = 0 \\ &\text{y } f_{T \cdot} \dot{T} \geq 0 \end{aligned}$$

con $G > 0$ y $\dot{\lambda} = f_{T \cdot} \dot{T} / G \geq 0$ determinado.

ii) *Materiales idealmente plásticos.*

$$D^p = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T) < 0 \\ 0 \text{ si } f(T) = 0 \text{ y } f_{T \cdot} \dot{T} < 0 \end{cases}$$

$$D^p = \dot{\lambda} f_T \quad \text{si } f(T) = 0 \text{ y } f_{T \cdot} \dot{T} = 0$$

con $\dot{\lambda} \geq 0$ indeterminado.

Hasta aquí hemos presentado las ecuaciones constitutivas que definen D en función del incremento \dot{T} . En el caso de materiales idealmente plásticos estas relaciones quedan indeterminadas en virtud de la indeterminación en el coeficiente $\dot{\lambda}$.

Debemos observar que la ecuación constitutiva que nos relaciona \dot{T} en función de D no presenta las dificultades anteriores como era natural esperar.

Para obtenerlas observamos que en todo proceso con deformación plástica ($\dot{\lambda} > 0$) resulta:

$$D D = D (D^e + D^p) = \dot{T} + \dot{\lambda} D f_T$$

multiplicando ambos miembros escalarmente por f_T y recordando que cualquiera sea el tipo de material $\dot{\lambda} G = f_T \cdot \dot{T}$, tenemos:

$$f_T \cdot D D = f_T \cdot \dot{T} + \dot{\lambda} f_T \cdot D f_T = \dot{\lambda} (G + f_T \cdot D f_T)$$

luego:

$$\dot{\lambda} = f_T \cdot D D / (G + f_T \cdot D f_T)$$

Como vemos $\dot{\lambda}$ está siempre bien definida en función de D , tanto para materiales con endurecimiento ($G > 0$) como para idealmente plásticos ($G = 0$).

Con este resultado no es difícil obtener la siguiente expresión:

$$\dot{T} = \left(\mathbb{D} - \frac{\mathbb{D} f_T \otimes \mathbb{D} f_T}{G + f_T \cdot \mathbb{D} f_T} \right)_D = \bar{\mathbb{D}}^{ep}_D$$

donde el tensor de cuarta orden elastoplástico $\bar{\mathbb{D}}^{ep}$ está definido en función del estado (T, E^p, h) , en el caso de materiales con endurecimiento, o simplemente en función del estado actual de tensiones, en el caso de materiales idealmente plásticos.

La expresión anterior (válida para materiales con o sin endurecimiento) fue deducida solamente para $D^p \neq 0$. Los otros casos pueden ser incluidos en una sola expresión de la siguiente forma:

$$T = \left(\mathbb{D} - \alpha \frac{\mathbb{D} f_T \otimes \mathbb{D} f_T}{G + f_T \cdot \mathbb{D} f_T} \right)_D = \mathbb{D}^{ep}_D$$

donde para materiales con endurecimiento:

$$\alpha = 1 \quad \text{si } f(T, E^p, h) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} \geq 0$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T, E^p, h) < 0 \\ 0 \text{ si } f(T, E^p, h) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} < 0 \end{cases}$$

y para materiales idealmente plásticos:

$$\alpha = 1 \quad \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \dot{T} < 0 \\ 0 \text{ si } f(T) < 0 \end{cases}$$

Las expresiones anteriores definen α en función de \dot{T} . No resulta difícil expresar α en función de D^5 . En el caso de materiales con endurecimiento resulta:

$$\alpha = 1 \quad \text{si } f(T, E^p, h) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \mathbb{D} D \geq 0$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T, E^P, h) = 0 & \text{y } f_T \cdot \mathbb{D} D < 0 \\ 0 & \text{si } f(T, E^P, h) < 0 \end{cases}$$

y para materiales idealmente plásticos:

$$\alpha = 1 \quad \text{si } f(T) = 0 \quad \text{y } f_T \cdot \mathbb{D} D \geq 0$$

$$\alpha = 0 \quad \begin{cases} \text{si } f(T) = 0 & \text{y } f_T \cdot \mathbb{D} D < 0 \\ 0 & \text{si } f(T) < 0 \end{cases}$$

Con estos resultados podemos reescribir \dot{T} en función de D :

$$\dot{T} = \left(\mathbb{D} - \alpha \frac{\mathbb{D} f_T \otimes \mathbb{D} f_T}{G + f_T \cdot \mathbb{D} f_T} \right) D = \mathbb{D}^{ep} D$$

donde α está definido en función de D .

La "inversa" de esta ecuación constitutiva toma la forma:

i) Materiales con endurecimiento:

$$D = \mathbb{D}^{-1} + \alpha \frac{f_T \otimes f_T}{G} \dot{T}$$

α definido en función de \dot{T}

ii) Materiales idealmente plásticos:

$$D = D^e + D^p = \mathbb{D}^{-1} T + \alpha \dot{\lambda} f_T$$

con $\dot{\lambda} = 0$ indeterminado y α definido como en el i tem i.

I.4. Algunas funciones de fluencia.

Según fue observado, la superficie de fluencia podía expresarse matematicamente a través de:

$$f(T, E^P, h) = 0$$

donde (T, E^P, h) es el estado *actual* en que se encuentra el punto material que se está analizando. La *superficie de fluencia inicial* podrá expresarse como función solamente del estado de tensiones. Lo anterior, supone que el cuerpo en su configuración inicial se encuentra en un estado virgen, es decir, sin deformaciones plásticas. De esta manera, la superficie inicial de fluencia podrá expresarse como:

$$f(T) = 0$$

Si suponemos ahora que el material es isotrópico, la función f deberá ser isotrópica, es decir:

$$f = f(T) = \tilde{f}(I_1, I_2, I_3)$$

donde los I_i son los invariantes principales del tensor T :

$$I_1 = \text{tr } T, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr } T^2 - \text{tr}^2 T), \quad I_3 = \det T$$

En lo que sigue no haremos distinción entre f y \tilde{f} . Recordando que $T = S + (\text{tr } T)I/3$, S tensor desviador, y designando con:

$$J_1 = \text{tr } S = 0 \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S \quad , \quad J_3 = \det S$$

los invariantes de S , es posible expresar I_2 , I_3 en función de I_1 , I_2 y I_3 :

$$I_2 = J_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \quad ; \quad I_3 = J_3 + \frac{1}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 J_2$$

De las expresiones anteriores, la función de fluencia inicial puede reescribirse de la siguiente forma:

$$f = f(I_1, J_2, J_3)$$

Ahora bien, los efectos de la presión hidrostática sobre la superficie de fluencia y deformaciones plásticas son bien conocidos a partir de los trabajos de BRIDGMAN. En el caso de metales f resulta independiente de I_1 por lo que:

$$f = f(J_2, J_3)$$

Si en el espacio de tensiones adoptamos como sistema de referencia el de las direcciones principales de T no resulta difícil mostrar que $f = f(J_2, J_3) = 0$ es un cilindro de generatriz paralela a una recta igualmente inclinada respecto a estos ejes (figura I.4).

Dado que la superficie de fluencia es independiente de la presión hidrostática, bastará estudiar lo que ocurre sobre la intersección del cilindro con el plano, cuya normal es la recta igualmente inclinada respecto a los tres ejes. Este plano

es llamado plano octahédrico.

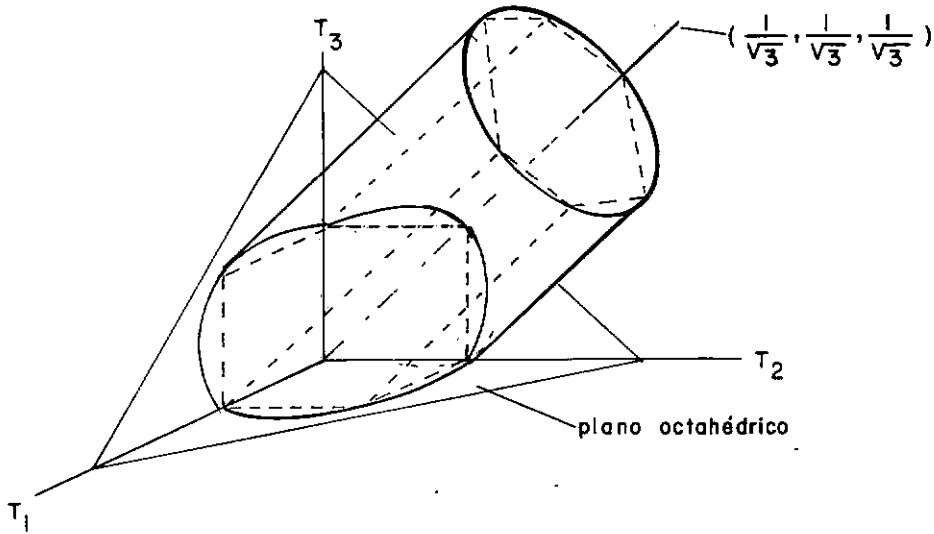


Figura I.4

I.4.1. Criterio de fluencia de von Mises.

En el año 1913 von Mises introdujo un criterio ini
cial de fluencia que actualmente lleva su nombre:

$$J_2^{1/2} - \chi_0 = 0$$

donde χ_0 es una constante cuya interpretación física es la si
guiente:

$$\chi_0 = T_{12}^Y = T_{11}^Y / \sqrt{3}$$

donde T_{11}^Y y T_{12}^Y son las tensiones de fluencia en tracción sim

ple y corte puro respectivamente.

Para definir las ecuaciones constitutivas asociativas correspondientes al criterio de von Mises precisamos calcular f_T :

$$f_T = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S$$

a su vez:

$$f_T \cdot \dot{T} = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S \cdot \dot{T} = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S \cdot \dot{S}$$

y en virtud de que $J_2 > 0$ para $S \neq 0$ resulta en este caso:

$$f_T \cdot \dot{T} \geq 0 \iff S \cdot \dot{S} \geq 0$$

Luego, la ley asociativa correspondiente al criterio de von Mises y materiales idealmente plásticos toma la forma:

$$D^P = 0 \quad \begin{cases} \text{si } J_2^{-1/2} - \chi_0 < 0 \\ 0 \text{ si } J_2^{-1/2} - \chi_0 = 0 \text{ y } S \cdot \dot{S} < 0 \end{cases}$$

$$D^P = \dot{\lambda} \frac{S}{2\chi_0} \quad \text{si } J_2^{-1/2} - \chi_0 = 0 \text{ y } S \cdot \dot{S} = 0$$

Admitiendo $D^P \neq 0$, de la última expresión tenemos:

$$D^P \cdot D^P = \frac{\dot{\lambda}^2}{2}$$

de donde:

$$\dot{\lambda} = 2L_2^{1/2}, \quad L_2 = \frac{1}{2} D^P \cdot D^P$$

Es decir, $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(D^P)$ está definido en el espacio de velocidades de deformación plástica para todo D^P no nulo. A su vez:

$$D^P = \frac{2L_2^{1/2}}{2\chi_0} S$$

de donde:

$$S = S(D^P) = \chi_0 \frac{D^P}{L_2^{1/2}}$$

De las expresiones anteriores podemos concluir que:

- i) Toda vez que $J_2^{1/2} - \chi_0 = 0$ y $S \cdot \dot{S} = 0$ la ecuación de von Mises $D^P = D^P(S) = \dot{\lambda} S / 2\chi_0$ (definida en el espacio de tensiones) queda indeterminada en virtud del coeficiente $\dot{\lambda}$. No ocurre lo mismo con la ecuación "inversa" $S = S(D^P)$ que está bien definida en el espacio de deformaciones para todo $D^P \neq 0$.
- ii) Para todo $D^P \neq 0$ la ecuación $S = S(D^P)$ satisface:

$$J_2^{1/2} - \chi_0 = 0 \quad \text{y} \quad S \cdot \dot{S} = 0$$

En efecto:

$$\left(\frac{1}{2} S \cdot S\right)^{1/2} - \chi_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{\chi_0^2}{L_2} D^P \cdot D^P\right)^{1/2} - \chi_0 = \chi_0 - \chi_0 = 0$$

$$S \cdot \dot{S} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S \cdot S) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (2\chi_0^2) = 0$$

Más adelante cuando veamos las ecuaciones constitutivas para materiales viscoplásticos haremos referencia a estas expresiones.

I.4.2. Criterio de fluencia de Tresca.

Además del criterio de von Mises, otro criterio conocido con el nombre de criterio de Tresca, ha sido utilizado también con éxito en numerosas aplicaciones, fig. I.4.

Para expresar este criterio es conveniente recordar que por isotropía la superficie inicial de fluencia podía expresarse en función de los invariantes de T :

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0$$

Recordando que los I_i pueden ser escritos en función de los autovalores de T , que llamaremos T_1 , T_2 y T_3 , la expresión anterior toma la forma:

$$f(T_1, T_2, T_3) = 0$$

Admitiendo que las tensiones principales verifican la relación $T_3 > T_2 > T_1$ el criterio de fluencia de Tresca puede ser expresado por:

$$T_3 - T_1 = Y = T_{11}^Y$$

Teniendo en cuenta que en el caso de plasticidad ideal asociativa $D^P = \dot{\lambda} f_T$, en componentes la relación anterior resulta:

$$D_3^P = -D_1^P = \dot{\lambda} \quad , \quad D_2^P = 0$$

I.4.3. Ley no asociativa de von Mises-Tresca.

A esta ley se arriba adoptando como criterio de fluencia el criterio de Tresca y como función potencial de plasticidad la función:

$$g = J_2 = \frac{1}{2} S.S$$

De ahí el nombre de ley no asociativa de von Mises- Tresca.

Teniendo en cuenta que en el caso de plasticidad ideal no asociativa $D^P = \dot{\lambda} g_T$ y que en nuestro caso $g_T = S$, la ley constitutiva resulta:

$$D^P = \dot{\lambda} S$$

que en función de las direcciones principales conduce a:

$$D^P = \dot{\lambda} S_1 \quad , \quad D^P = \dot{\lambda} S_2 \quad , \quad D^P = \dot{\lambda} S_3$$

De estas expresiones se deduce que $\dot{\lambda}$ está dado por:

$$\dot{\lambda} = \frac{D_3^P - D_1^P}{S_3 - S_1}$$

Admitiendo que las tensiones principales verifican la relación $T_3 > T_2 > T_1$ el criterio de fluencia de Tresca puede ser expresado por:

$$T_3 - T_1 = Y = T_{11}^Y$$

Teniendo en cuenta que $T_3 - T_1 = S_3 - S_1$ e introduciendo la criterio de fluencia de Tresca en la expresión de $\dot{\lambda}$ se arriba a que:

$$\dot{\lambda} = \frac{D_3^P - D_1^P}{Y}$$

La expresión de $\dot{\lambda}$ en función de las componentes de D^P permite obtener la ley constitutiva inversa de la ley de plasticidad ideal de von Mises-Tresca:

$$S = \frac{Y}{D_3^P - D_1^P} D^P$$

Expresiones semejantes pueden obtenerse para las otras relaciones entre las tensiones principales T_1, T_2, T_3 .

I.5. Algunos problemas simples de valor de contorno en elasto-plasticidad ideal.

Dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales a temperatura constante, designase como *problema de valor de contorno* (p.v.c.) en la teoría cuasi-estática de la elastoplasticidad, al problema de determinar en el instante t los campos \dot{T} , D y v que satisfacen las siguientes ecuaciones³:

. Ecuaciones de equilibrio:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

. Ecuaciones cinemáticas:

$$D = (\nabla v)^S = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) \equiv (\nabla \dot{u})^S \quad \text{en } \Omega$$

. Ecuaciones constitutivas:

$$\dot{T} = \left(D - \alpha \frac{D f_T \otimes D f_T}{G + f_T \cdot D f_T} \right) D \text{ en } \Omega, \alpha \text{ definido en el párrafo I.3.}$$

. Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} T_n &= \dot{a} & \text{en } \Gamma_T \\ v &= \dot{u} & \text{en } \Gamma_u \end{aligned}$$

donde $\dot{b} \, dt$, $\dot{a} \, dt$ y $\dot{u} \, dt$ son los incrementos dados al sistema de fuerzas y al desplazamiento prescripto respectivamente. Ω es la región ocupada por el cuerpo y Γ_T , Γ_u son las partes del contorno de Ω donde están prescriptas las tensiones y los desplazamientos.

En esta sección presentaremos tres ejemplos de aplicación del p.v.c. anterior. Cada uno de ellos es analizado para una ley constitutiva particular que posibilitará, en cada caso, arribar a la solución exacta del problema planteado. Cada problema es analizado para diferentes niveles de carga, el primero corresponde al límite elástico y el último al límite plástico es decir, la carga para la cual la estructura está totalmente plastificada.

Las soluciones que a seguir obtendremos serán posteriormente comparadas (véase Capítulo V) con las soluciones aproximadas obtenidas mediante la formulación variacional elasto/viscoplástica conjuntamente con el Método de Elementos Finitos.

EJEMPLO 1. Esfera hueca con presión interna.

Sea una esfera hueca de pared espesa, radio interno r_i y radio externo r_e , sometida a una presión interna $p^{3,7}$

y constituida por un material que satisface el criterio de von Mises.

Debido al tipo de simetría del problema emplearemos coordenadas esféricas. Para este ejemplo el p.v.c. consiste en el siguiente sistema:

$$\frac{dT_r}{dr} + 2 \frac{T_r - T_\phi}{r} = 0 \quad (\text{ec. de equilibrio})$$

$$E_r = \frac{du}{dr}, \quad E_\phi = E_\theta = \frac{u}{r}, \quad E_{\phi r} = E_{r\theta} = E_{\theta\phi} = 0 \quad (\text{ec. cinemática})$$

$$T_r(r_i) = -p, \quad T_r(r_e) = 0 \quad (\text{cond. de contorno})$$

donde u es el desplazamiento en la dirección r .

Ahora bien, si $p \in [0, p^{le}]$, donde p^{le} es llamada de límite elástico, el comportamiento de la esfera es puramente elástico. Supuesto un material elástico isotrópico tendremos que la integración del sistema anterior conduce a:

$$T_r = -\frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] ; \quad T_\phi = \frac{p}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right]$$

$$u = \frac{rp}{\alpha} \left[\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right]$$

donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{es el módulo de deformación volumétrica}$$

$$\alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^3 - 1$$

Para la determinación de la carga p^{le} recurrimos

a la expresión del criterio de fluencia de von Mises que para este problema toma la forma

$$f(T) = T_{\phi} - T_r - Y = 0$$

donde $Y = T_{11}^Y$. Sustituyendo las expresiones de T_{ϕ} y T_r en la igualdad anterior tenemos:

$$\frac{p}{\alpha} \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - Y = 0$$

Dado que el máximo de r_e/r se verifica para $r = r_i$, los primeros puntos a alcanzar la condición de fluencia son aquellos para los cuales $r = r_i$. Luego:

$$p^{\ell e} = \frac{2}{3} \alpha Y \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^3$$

Si $p \in [p^{\ell e}, p^{\ell p}]$ tenemos que la esfera tendrá un comportamiento elastoplástico, existiendo un valor de r , $r=c$, tal que para todo punto $r_i = r = c$ se verificará el criterio de fluencia de von Mises (región plastificada).

La integración del sistema es ahora más complicada y puede verse en detalle en ⁵, la respuesta en la región $r \in [r_i, c]$ está dada por:

$$p^{\ell p} = 2YL(r_e/r_i)$$

$$T_r = -\frac{2}{3} Y \left[3L \left(\frac{c}{r} \right) + 1 - \left(\frac{c}{r_e} \right)^3 \right]$$

$$T_{\phi} = \frac{2}{3} Y \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{c}{r_e} \right)^3 - 3L \left(\frac{c}{r} \right) \right]$$

$$u = Yr \left\{ \frac{1-\nu}{E} \left(\frac{c}{r} \right)^3 - 2K \left[3L \left(\frac{c}{r} \right) + 1 - \left(\frac{c}{r_e} \right)^3 \right] \right\}$$

donde $L(.)$ representa el logaritmo neperiano.

En particular, haciendo uso de los resultados anteriores y para relaciones $r_e/r_i = 1.5$ y 2 , hemos determinado las tensiones y desplazamientos correspondientes a seis niveles de presión p que van desde el límite elástico p^{le} hasta el límite plástico p^{lp} . Las distribuciones de tensiones T_r y T_ϕ para diferentes grados de plastificación, dados por la relación c/r_i son presentadas en las figuras V.2. , V.3. Igualmente la presión p , los desplazamientos $u(r_i)$ y $u(r_e)$ son también graficados en las figuras V.4. y V.5.

EJEMPLO 2. Tubo circular infinito

Consideremos un tubo circular de pared espesa sometido a una presión interna p , constituido de un material idealmente plástico que satisface la ley de Tresca^{3,5}.

Dado el tipo de simetría del problema hemos adoptado coordenadas cilíndricas con el eje z coincidente con el eje del cilindro.

El sistema de ecuaciones a integrar consiste en:

$$r \frac{dT_r}{dr} + T_r - T_\theta = 0, \quad \frac{dT_z}{dz} = 0 \quad (\text{ec. de equilibrio})$$

$$E_r = \frac{du}{dr}, \quad E_\theta = \frac{u}{r}, \quad E_{r\theta} = E_{\theta z} = E_{zr} = E_z = 0 \quad (\text{ec. cinemát.})$$

$$T_r(r_i) = -p, \quad T_r(r_e) = 0$$

Nuevamente, como en el ejemplo de la esfera, si $p \in [0, p^{\ell e}]$ la respuesta es elástica:

$$T_r^e = -\frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right], \quad T_\theta^e = \frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 + 1 \right], \quad T_z^e = \frac{2\nu p}{\alpha}$$

$$u^e = \frac{p}{E\alpha} \left[(1 + \nu) \frac{r_e^2}{r} + (1 - \nu - 2\nu^2) r \right]$$

$$p^{\ell e} = \frac{1}{2} \alpha Y \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^2, \quad \alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^2 - 1$$

Si $p \in [p^{\ell e}, p^{\ell p}]$, existe una región $r_i \leq r \leq c$ plastificada donde la integración de las ecuaciones anteriores conduce a:

$$T_r^p = \frac{Y}{2} \left[\left(\frac{c}{r_e} \right)^2 - 1 - 2L \left(\frac{c}{r} \right) \right], \quad T_\theta^p = \frac{Y}{2} \left[\left(\frac{c}{r_e} \right)^2 + 1 - 2L \left(\frac{c}{r} \right) \right]$$

$$T_z^p = \nu (T_r + T_\theta)$$

$$u^p = \frac{(1+\nu)}{E} Y \frac{1}{r} \left\{ (1 - \nu) c^2 + \frac{1-2\nu}{2} r^2 \left[\left(\frac{c}{r_e} \right)^2 - 1 + 2L \left(\frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

$$p^{\ell p} = Y L \left(\frac{r_e}{r_i} \right)$$

Supongamos ahora que el cilindro fue sometido a una presión $p > p^{\ell e}$ y posteriormente descargado hasta $p = 0$. En este caso, quedarán en el cilindro tensiones y desplazamientos que llamaremos de residuales.

Para determinarlas hay que tener presente que p alcanza un valor:

$$p^{\ell e} < p = \frac{Y}{2} \left[1 - \left(\frac{c}{r_e} \right)^2 + 2 L \left(\frac{c}{r_i} \right) \right]$$

y la descarga $p^* = -p$ lleva al cilindro a la condición de carga nulo. La descarga se realiza, en este caso, en régimen e lástico y produce las tensiones y desplazamientos siguientes:

$$T_r^d = -\frac{p^*}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right], \quad T_\theta^d = \frac{p^*}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 + 1 \right]; \quad T_z = \frac{2\nu p^*}{\alpha}$$

$$u^d = \frac{p^*}{\alpha E} \left[(1 + \nu) \frac{r_e^2}{r} + (1 - \nu) r \right]$$

$$\text{donde } p^* = -\frac{\gamma}{2} \left[1 - \left(\frac{c}{r_e} \right)^2 + 2L \left(\frac{c}{r_i} \right) \right].$$

Superponiendo los estados p y p^* se obtienen las tensiones y desplazamientos residuales:

$$T_j^r = T_j^i + T_j^d, \quad u^r = u^i + u^d, \quad j = r, \theta, z; \quad i = e, p$$

y donde T_j^r es la tensión residual T_j y el índice i resulta:

$$i = p \quad \text{si} \quad r_i \leq r \leq c$$

$$i = e \quad \text{si} \quad c \leq r \leq r_e$$

Los resultados anteriormente presentados fueron graficados, para distintos niveles de plastificación y para $r_e/r_i = 2$, en las figuras V.6 a V.10.

EJEMPLO 3. Disco hueco girando a velocidad constante.

Un disco hueco de espesor constante h , radio interno r_i y radio externo r_e gira alrededor de su eje a veloci - dad constante $\omega^{5,7}$, el material satisface la ley de Tresca.

Como el espesor es pequeño en comparación a su diámetro y por otra parte la fuerza de inercia, que es la única que consideraremos, está uniformemente distribuida en el espesor, el estado de tensiones en el disco puede ser aproximado mediante un estado plano de tensiones.

Dada la simetría del problema, usaremos coordenadas cilíndricas r, θ y z .

El sistema de ecuaciones a integrar resulta:

$$\frac{d(rT_r)}{dr} - T_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (\text{ec. de equilibrio})$$

$$E_r = \frac{du}{dr}, \quad E_\theta = \frac{u}{r}, \quad E_z = \frac{dv}{dz}, \quad E_{\theta r} = E_{rz} = E_{z\theta} = 0 \quad (\text{ec. cinemat.})$$

con las condiciones de contorno:

$$T_r(r_i) = T_r(r_e) = 0$$

y donde u, v son las componentes del desplazamiento en las direcciones r y z respectivamente.

Así como en los ejemplos anteriores existían cargas p^{le} y p^{lp} , que permitían distinguir el comienzo del proceso plástico (p^{le}) y el instante en que la estructura se encuentra totalmente plastificada, en este ejemplo si la velocidad de rotación del disco ω se encuentra en el intervalo $[0, \omega_{le}]$ el disco se comporta como elástico y si $\omega \in [\omega_{le}, \omega_{lp}]$ el disco se comporta como elastoplástico y para $\omega = \omega_{lp}$ se encuentra totalmente plastificado.

Suponiendo $\omega \in [0, \omega_{le}]$ la integración del sistema de ecuaciones conduce a ²⁸

$$T_r^e = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_e^2 + r_i^2 - r^2 - \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2})$$

$$T_\theta^e = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_e^2 + r_i^2 + \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2)$$

$$u^e = \frac{3+\nu}{8E} \rho \omega^2 [(1-\nu)(r_i^2 + r_e^2)r + \frac{1+\nu}{r} r_e^2 r_i^2 - \frac{1-\nu^2}{3+\nu} r^3]$$

$$\omega_{\ell e}^2 = \frac{4Y}{\rho [(3+\nu)r_e^2 + (1-\nu)r_i^2]}$$

Ahora bien, si $\omega \in [\omega_{\ell e}, \omega_{\ell p}]$ la integración del sistema es más complicada y puede verse en detalle en ⁵. Dentro de la región plastificada $r_i \leq r \leq c$ los resultados a que se arriban son los siguientes:

$$T_r^p = Y(1 - \frac{r_i}{r}) + \frac{1}{3} \rho \omega^2 (\frac{r_i^3}{r} - r^2)$$

$$T_\theta^p = Y$$

$$u^p = \frac{Y}{E} [(1-\nu)r - r_i L(r)] + \frac{1}{3} \frac{\rho \omega^2}{E} (r_i^3 L(r) - \frac{1}{3} r^3) + C_2$$

y para la región elástica $c \leq r \leq r_e$:

$$T_r^e = -\frac{(3+\nu)\rho\omega^2}{8} r^2 + \frac{E}{2(1-\nu)} C_3 - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{C_4}{r^2}$$

$$T_\theta^e = -\frac{(1-3\nu)\rho\omega^2}{8} r^2 + \frac{E}{2(1-\nu)} C_3 + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{C_4}{r^2}$$

$$u^e = -\frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^3}{8E} + \frac{C_3}{2} r + \frac{C_4}{r}$$

$$C_2 = - \frac{Y}{E} \left[(1-\nu) c - r_i L(c) \right] - \frac{1}{3} \frac{\rho \omega^2}{E} (r_i^3 L(c) - \frac{1}{3} c^3) - \\ - \frac{(1-\nu^2) \rho \omega^2 c^3}{8E} + \frac{C_3}{2} c + \frac{C_4}{c}$$

$$\alpha C_3 = \frac{\delta (Y\phi - \sigma\psi) - \beta (\gamma\sigma + Y\gamma)}{\delta (\phi - \psi) + \gamma (\phi + \psi) - 2\gamma\beta}$$

$$C_4 = \frac{Y(\phi - \beta) + \sigma(\beta - \psi)}{\delta (\phi - \psi) + \gamma (\phi + \psi) - 2\gamma\beta}$$

$$\rho \omega^2 = \frac{\sigma(\gamma + \delta) + Y(\gamma - \delta)}{\delta (\phi - \psi) + \gamma (\phi + \psi) - 2\gamma\beta}$$

$$\alpha = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \beta = - \frac{3+\nu}{8} r_e^2 \quad , \quad \gamma = \frac{E}{(1+\nu) c^2}$$

$$\delta = \frac{E}{(1+\nu) r_e^2} \quad , \quad \sigma = Y(1 - \frac{r_i}{c}) \quad , \quad \psi = - \frac{1+3\nu}{8} c^2$$

$$\phi = - \frac{3+\nu}{8} c^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} \frac{r_i^2}{c} \quad ,$$

Si se frena un disco que alcanzó una velocidad de giro superior al límite elástico, $\omega > \omega_{le}$, quedan en él tensiones y desplazamientos residuales.

Sus valores pueden ser obtenidos superponiendo a la solución elastoplástica para la velocidad ω la solución e lástica correspondiente a la velocidad $\omega^* = -\omega$.

Las distribuciones de tensiones radiales, circunferenciales y desplazamiento radial de un disco, con relación

de radios $r_e = 4r_i$, para diferentes velocidades ω son presentadas en la figura V.11. Las tensiones y el desplazamiento del mismo disco cuando el nivel de plastificación alcanza el valor $c = 2.2 r_i$ y las correspondientes tensiones y desplazamientos residuales son graficados en las figuras V.15 y V.16.

I.6. Formulaciones variacionales en elastoplasticidad.

En secciones anteriores se pudo observar que soluciones analíticas de problemas en elastoplasticidad son solamente posibles en un número reducido de casos simples.

Por tal motivo, las formulaciones variacionales equivalentes resultan de interés puesto que conjuntamente con el Método de Elementos Finitos permiten obtener soluciones aproximadas de los problemas que se presentan en elastoplasticidad.

Formularemos a seguir tanto para materiales idealmente plásticos como con endurecimiento principios variacionales donde la velocidad v y la derivada de la tensión \dot{T} son las incógnitas.

I.6.1. Principios variacionales donde v es la incógnita principal.

Introduciremos previamente el campo de velocidades cinemáticamente admisibles:

$$\text{Kin.}v = \{v^* = v^*(x) \text{ , regular, } v^* = \dot{u} \text{ en } \Gamma_u\}$$

entre cuyos elementos v^* estará la solución de nuestro problema de valor de contorno y que designaremos con v .

Al campo de velocidad de deformación D^* deducido a través de la ecuación cinemática $D^* = (\nabla v^*)^S$ será denominado *velocidad de deformación cinemáticamente admisible*.

Obsérvese que el campo de tensiones \dot{T}^* deducido a partir de D^* mediante las ecuaciones constitutivas elastoplásticas no necesariamente satisface las ecuaciones de equilibrio.

Si designamos con \dot{T} , D , V a los campos solución de nuestro problema de valor de contorno y admitimos regularidad suficiente en \dot{T} , es fácil mostrar la equivalencia entre nuestro problema y el siguiente problema variacional:

Determinar $v \in \text{Kin.v}$ tal que la igualdad:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot (v^* - y) d\Gamma &= \\ &= \int_{\Omega} \dot{T} \cdot (D^* - D) d\Omega \end{aligned}$$

se verifique para cualquier $v^ \in \text{Kin.v}$ con las condiciones subsidiarias:*

$$T = T(v) \quad (\text{ecuación constitutiva})$$

$$D = (\nabla v)^S, \quad D^* = (\nabla v^*)^S, \quad (\text{ecuación cinemática})$$

Por su semejanza con elasticidad al principio variacional anterior lo denominaremos *Principio de la Potencia Virtual*.

A seguir mostraremos que existe un funcional $\pi = \pi(v^*)$ cuya minimización equivale al problema variacional anterior. Para ello recordemos que tanto para materiales idealmen-

te plásticos como con endurecimiento la siguiente relación se verifica⁵ :

$$\dot{T}^* \cdot D^* - \dot{T} \cdot D - 2\dot{T} \cdot (D^* - D) \geq 0$$

e igual a cero si y sólo si $D^* = D$.

Sustituyendo la expresión anterior en el Principio de la Potencia Virtual se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot (v^* - v) d\Gamma &= \int_{\Omega} \dot{T} \cdot (D^* - D) d\Omega \leq \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\dot{T}^* \cdot D^* - \dot{T} \cdot D) d\Omega \end{aligned}$$

para cualquier $v^* \in \text{Kin}.v$

Reordenando términos en la relación anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} \pi(v^*) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{T}^* \cdot D^* d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v^* d\Gamma \geq \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{T} \cdot D d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v d\Gamma = \pi(v) \end{aligned}$$

para cualquier $v^* \in \text{Kin}.v$ y donde la igualdad se verifica si en todo punto $X \in \Omega$, $v^* = v$.

Arribamos por tanto al siguiente principio de mínimo:

De todas las velocidades cinematicamente admisibles $v^ \in \text{Kin}.v$, aquella que hace mínimo al funcional $\pi(v^*)$, es la solución del problema de valor de contorno en elastoplasticidad.*

Como se puede observar nuestro problema consiste en determinar el mínimo de un funcional cuadrático, definido en todo el espacio Kin.v. No obstante lo anterior el problema es no lineal puesto que el coeficiente α que aparece cuando explicitamos la ecuación constitutiva $\dot{T} = \dot{T}(D)$ depende de la propia solución.

I.6.2. Principios variacionales donde \dot{T} es la incógnita principal.

Introduciremos en este caso dos campos Est. \dot{T} y P.A. \dot{T} que nos resultará de utilidad.

Campo de velocidad de tensiones estaticamente admisibles:

$$\text{Est.}\dot{T} = \{ \dot{T} = \text{Sym} ; \text{div } \dot{T} + \dot{b} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \dot{T}n = \dot{a} \text{ en } \Gamma_T \}$$

Campo de velocidad de tensiones plasticamente admisibles:

$$\text{P.A.}\dot{T} = \{ \dot{T} \in \text{Sym} ; f(\dot{T}) < 0 , f(\dot{T}) = 0 \\ \text{y } f_T \cdot \dot{T} \leq 0 \}$$

A partir de los campos introducidos anteriormente definiremos un estado de tensión plástica estaticamente admisible que designaremos con \dot{T}^0 .

En el caso de materiales idealmente plásticos $\dot{T}^0 \in [\text{Est.}\dot{T} \cap \text{P.A.}\dot{T}]$ en virtud que en este caso no son posi

bles tensiones fuera del convexo de plasticidad $f(T) \leq 0$.

En el caso de materiales con endurecimiento $\dot{T} \in \text{Est.}\dot{T}$ puesto que estamos admitiendo que todos los estados de tensión son accesibles modificando la historia.

Nuevamente si designamos con \dot{T} , D y v a la solución de nuestro problema de valor de contorno y admitimos regularidad suficiente es posible mostrar la equivalencia con el siguiente problema variacional:

Determinar la tensión plástica estaticamente admisible \dot{T} , tal que la igualdad:

$$\int_{\Gamma_u} (\dot{T}^0 - \dot{T}) n \cdot \dot{u} \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\dot{T}^0 - T) \cdot D \, d\Omega$$

se verifique para todo \dot{T}^0 estaticamente admisible, con la condición subsidiaria $D = D(\dot{T})$

Por semejanza con elasticidad al principio anterior lo denominaremos *Principio de la Potencia Virtual Complementaria*.

Debemos notar que existe una diferencia fundamental según que el material sea idealmente plástico o plástico con endurecimiento. En el primer caso $\dot{T}^0 \in [\text{Est.}\dot{T} \quad \text{P.A.}\dot{T}]$ donde $\text{P.A.}\dot{T}$ impone restricciones lineales sobre \dot{T} ($f_T \cdot \dot{T} \leq 0$) y en el segundo $\dot{T}^0 \in \text{Est.}\dot{T}$ no apareciendo la restricción anterior.

Al igual que en el caso anterior existe un funcional $\pi^C = \pi^C(\dot{T})$ cuya minimización equivale al problema de valor de contorno en elastoplasticidad.

Para ello tengamos presente que tanto en materiales idealmente plásticos como con endurecimiento⁵ la siguiente

relación se verifica:

$$\dot{T}^0 \cdot D^0 - \dot{T} \cdot D - 2(\dot{T}^0 - \dot{T}) \cdot D \geq 0$$

e igual a cero si y sólo si $\dot{T}^0 = \dot{T}$

Introduciendo la expresión del Principio de la Potencia Virtual Complementaria y procediendo en forma similar al caso anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \pi^C(\dot{T}^0) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{T}^0 \cdot D^0 d\Omega - \int_{\Gamma_u} \dot{T}^0 n \cdot \dot{\bar{u}} d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{T} \cdot D d\Omega - \int_{\Gamma_u} \dot{T} n \cdot \dot{\bar{u}} d\Gamma = \pi^C(\dot{T}) \end{aligned}$$

para todo \dot{T}^0 plástico estaticamente admisible y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\dot{T}^0 = \dot{T}$ en todo $x \in \Omega$.

El principio mínimo correspondiente puede enunciarse como:

De todas las derivadas de la tensión plástica y estaticamente admisibles \dot{T}^0 , aquella que hace mínimo al funcional $\pi^C(\dot{T}^0)$ es la solución del problema de valor de contorno en elastoplasticidad.

CAPITULO II

CREEP ESTACIONARIO

El comportamiento de numerosos materiales estructura - les de empleo frecuente en ingeniería, para condiciones especia - les de cargamento, generalmente aplicados en intervalos de tiem po pequeño, puede ser aproximado con éxito mediante la Teoría de la Elasticidad o mediante la Teoría de la Plasticidad.

Si el cargamento se mantiene durante intervalos de tiem po grandes, los fenómenos reológicos pasan a tener significación y se hace necesario llevarlos en cuenta en el análisis. En este caso las tensiones y las deformaciones reales difieren en forma apreciable de las que se obtienen admitiendo que el material es elástico o plástico

Lo anterior se debe a que materiales de empleo estruc - tural frecuente, tales como madera, concreto, plásticos y meta - les a temperaturas elevadas presentan propiedades viscoelásti - cas ^{8,9} . Dicho comportamiento se pone de manifiesto en ensa - yos mecánicos, donde es posible apreciar la dependencia de las deformaciones con la velocidad de carga y con la permanencia de dichas cargas en el tiempo.

Uno de los problemas que usualmente se presenta en la aplicación estructural de los materiales viscoelásticos, es el análisis de tensiones y deformaciones correspondientes a cargas constantes, muchas veces durante prolongados intervalos de tiem po ¹⁰. Tal fenómeno conocido como deformaciones lentas a carga cons - tante o deformaciones de creep tiene importancia fundamental en la fabricación de motores, turbinas a gas y, en general, en las

construcciones con los materiales anteriormente mencionados ba
jo sollicitación permanente de significación.

Ultimamente, con la comprobación de que las radiacio
nes al igual que las temperaturas elevadas aumentan los efectos
de creep, dicho fenómeno ha adquirido también, relevancia en la
construcción de centrales nucleares¹¹.

El conocimiento más a fondo del fenómeno de creep, que
el desarrollo tecnológico demanda día a día , ha incentivado ex
tensivamente las investigaciones en esta área.

Dichas investigaciones se han centrado en dos aspectos
fundamentales, uno de ellos se refiere a la obtención de ecua -
ciones constitutivas que representen el fenómeno de creep y el
otro , al desarrollo de métodos de cálculo que permitan obtener
soluciones a problemas de ingeniería estructural donde dicho fe
nómeno debe ser llevado en cuenta.

Dada la dificultad experimental de ensayar diferentes
estados de tensión que se pueden presentar en la vida útil de u
na estructura, el camino seguido ha sido el de realizar ensayos
bajo estados simples de tensión^{12,13,14} y posteriormente generali-
zar los resultados para estados de tensión más complejos^{15, 16} .

En cuanto a los métodos de cálculo, dado que es reduci
do el número de problemas de creep, donde es posible obtener so
luciones exactas, se ha dado énfasis a los métodos de cálculo
aproximados y entre ellos fundamentalmente al Método de Elemen-
tos Finitos^{11, 17}.

En este capítulo se presenta un histórico sobre los
trabajos realizados en creep, junto con las diferentes leyes
constitutivas propuestas para el caso de tensión uniaxial y la
posterior generalización, admitiendo incompresibilidad e isotro

pía, para estados de tensión triaxial.

Se discuten las propiedades de las leyes constitutivas de creep y se muestra en qué casos dichas leyes derivan de un potencial. Dichos potenciales son determinados y su convexidad es analizada.

Posteriormente se muestra cómo es posible obtener una ley de creep secundario más general mediante el empleo de un polinomio de 2º grado del tensor desviador de tensiones.

Conocidas las leyes constitutivas se formula el problema de valor de contorno en creep secundario y se dan ejemplos en los que es posible obtener soluciones exactas.

Finalmente, haciendo uso de las propiedades de convexidad de los potenciales de creep, se muestra cómo arribar a principios variacionales que resultan de gran utilidad en la obtención de soluciones aproximadas.

II-1. Deformación de Creep en Tensión Uniaxial.

Si bien, el ingeniero francés L.T. Vicat efectuó en el siglo pasado, observaciones sistemáticas sobre el fenómeno de deformación lenta en barras metálicas traccionadas a ser empleadas en la construcción de puentes colgantes⁹. Se admite generalmente que la teoría fenomenológica de creep comenzó a principios de este siglo con los trabajos del físico inglés E.N. Andrade^{12,13}.

El fue quien introdujo la terminología empleada hasta el presente para distinguir diferentes zonas de creep y el primero en mostrar la diferencia de comportamiento entre deforma -

ciones lentas de barras metálicas a tensión constante y carga constante.

Las curvas de deformación de creep y velocidad de deformación de creep en función del tiempo (E_{11}, t) y (D_{11}, t) obtenidas por él, son indicadas en la figura II.1.

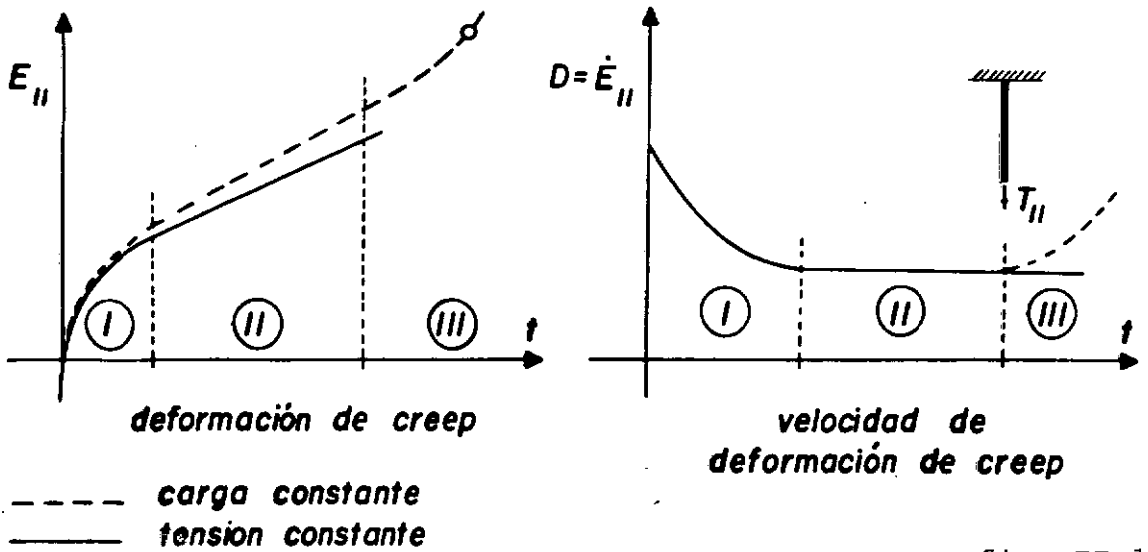


fig. II.1.

En ambas curvas se pueden distinguir tres zonas:

- I. creep primario o transiente
- II. creep secundario o en régimen estacionario
- III. creep terciario

Andrade observa además que en el caso de deformación lenta a tensión constante, no hay diferencia entre creep secundario y terciario, existiendo en este caso solamente dos zonas de creep.

Basándose en los resultados obtenidos en ensayos a tensión constante, Andrade postula la primera ley constitutiva de deformación dependiente del tiempo:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \beta t^{1/3}) e^{\alpha t}$$

donde; ℓ y ℓ_0 son las longitudes de las barras en los instantes $t=t$ y $t=0$ respectivamente, t es el tiempo bajo tensión constante, β y α parámetros de cada material dependiente del nivel de tensión a que las barras se encuentran sometidas.

Posteriormente, en la década del 30, con la demanda tecnológica de materiales metálicos que soportaran temperaturas elevadas para ser empleados en la fabricación de máquinas y motores, los fenómenos de creep fueron estudiados extensivamente por varios investigadores. Entre ellos se destacan, NORTON, BAILEY, SODEBERG, NADAI y HOFF.

Dada la preponderancia de las deformaciones de creep secundario sobre las de creep primario cuando las cargas actúan durante intervalos de tiempo de larga duración, se dio preferencia en los estudios de los investigadores anteriormente mencionados al caso de creep secundario.

De las leyes constitutivas propuestas por ellos cabe destacar las siguientes:

- i) ley potencial propuesta por NORTON¹⁴ en 1929

$$D_{11} = k_1 T_{11}^{\alpha_1}$$

- ii) ley exponencial de SODEBERG¹⁸ formulada en 1936

$$D_{11} = k_2 (e^{\alpha_2 T_{11}} - 1)$$

- iii) ley constitutiva propuesta por NADAI¹⁹ en 1937

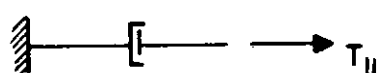
$$D_{11} = k_3 \sinh(\alpha_3 T_{11})$$

donde; D_{11} es la velocidad de deformación uniaxial de creep secundario, T_{11} tensión uniaxial, k_i , α_i constantes de cada mate

rial.

Las expresiones propuestas por NORTON, SODEBERG y NA DAI que permiten determinar la velocidad de deformación de creep para un estado tensional conocido, son generalizaciones de la ley lineal de Maxwell dada por: $D_{11} = k T_{11}$

Los modelos mecánicos correspondientes a las leyes anteriores están constituidos por un amortiguador lineal para el caso de la ley de Maxwell y un amortiguador no lineal para los otros casos como indica la figura II.2.



$$D_{11} = k T_{11}$$

lineal



$$D_{11} = f(T_{11})$$

no lineal

fig. II.2.

También el problema de creep primario ha sido motivo de estudio por parte de investigadores. En el caso de metales se emplea frecuentemente la siguiente relación

$$E_{11} = k T_{11}^m t^n$$

donde; k , m y n son constantes de cada material.

Según HOFF¹⁰ una función del tiempo del tipo t^n , para $n < 0.5$, ha mostrado buena aproximación a los resultados experimentales obtenidos no solamente en ensayos de metales, sino también en plásticos y concreto.

Finalmente cabe destacar los trabajos de PAO y MARIN²¹ quienes arribaron a una ley constitutiva de creep primario y secundario unificada. En ella, la deformación total de creep es

la suma de una parte que crece linealmente con t y otra que decrece en forma exponencial con t .

La ley constitutiva propuesta por ellos está dada por la expresión:

$$E_{11} = T_{11}^m [k(1-e^{-\alpha t}) + \beta t]$$

y su derivada \dot{E}_{11} por:

$$\dot{E}_{11} = D_{11} = T_{11}^m [k\alpha e^{-\alpha t} + \beta]$$

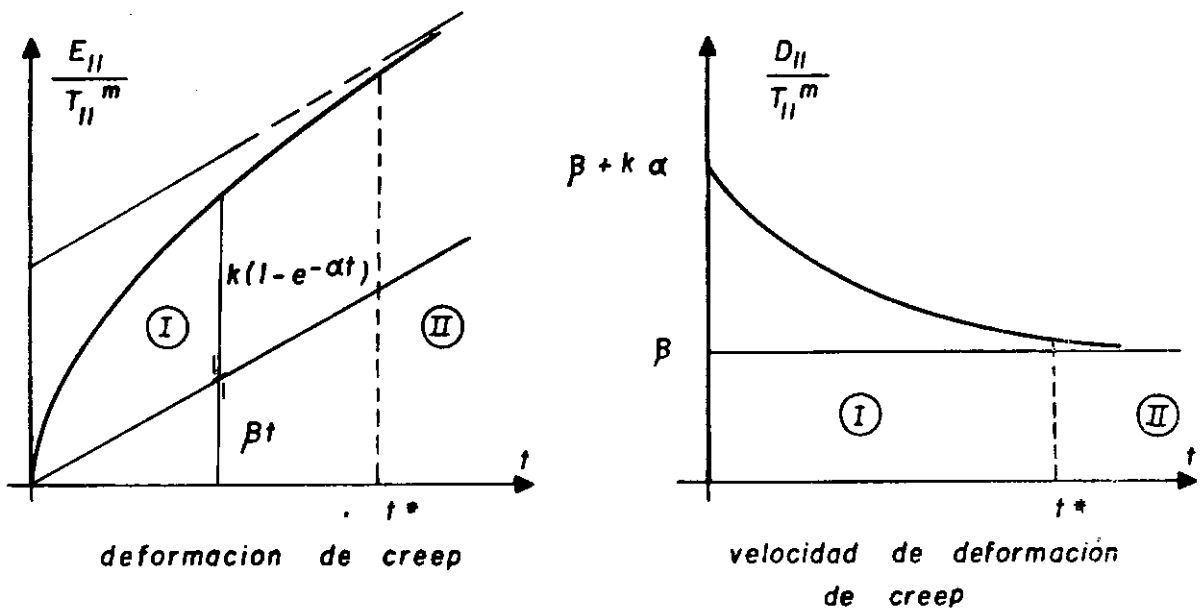


fig. II.3.

El valor de t^* que nos limita las zonas I y II de creep dependerá de las constantes del material α, β, k y m .

II.2. Ley Asociativa de VON MISES- ODQVIST

En 1930 BAILEY²², comprobó experimentalmente que en los

metales, las deformaciones de creep se producían a volumen constante, sin ser influenciadas por la presión hidrostática.

Basándose en las observaciones efectuadas por BAILEY²³ y admitiendo isotropía ODQVIST¹⁵ postuló en 1934 la primera ley constitutiva para creep secundario bajo tensión triaxial. Dicha ley está dada por la siguiente expresión tensorial:

$$D = f(S) S$$

donde:

D tensor velocidad de deformación, definido en la siguiente forma:

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S$$

v vector velocidad

T tensor de tensiones

S tensor desviador de tensiones

$$S = T - \frac{1}{3} (\text{tr } T) I = \left[I - \frac{1}{3} I \otimes I \right] T$$

f(S) función escalar de variable tensorial conocida como función de creep.

La función f(S) propuesta por ODQVIST es la siguiente:

$$f(S) = \frac{3}{2} k T_e^{n-1}$$

donde

k y n son constantes que dependen de cada material

T_e tensión efectiva $T_e = \left(\frac{3}{2} S \cdot S \right)^{1/2}$

De lo anterior se sigue que la ley de creep secundario formulada por ODQVIST puede ser reescrita de la siguientes forma:

$$D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$$

La velocidad de deformación de creep secundario de un material que verifica la ley anterior, depende del estado tensional en que se encuentra. En efecto, dado T en un punto X , es posible a traves de la ley constitutiva determinar el correspondiente D .

$$T \longrightarrow S \longrightarrow f(S) \longrightarrow D$$

$$S = \left[\Pi - \frac{1}{3} I \otimes I \right] T, \quad f(S) = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} \quad \text{Ley Const.}$$

II.2.1. Propiedades de la Ley Constitutiva.

A seguir veremos algunas propiedades de la ley constitutiva propuesta por ODQVIST.

i) Dos estados de tensión que difieren en una presión hidrostática producen igual velocidad de deformación.

Sean T_1 y T_2 dos estados de tensión que difieren en una presión hidroestática, por lo tanto verifican que: $T_2 - T_1 = pI$.

Explicitando el desviador S_2 mediante:

$$\begin{aligned} S_2 &= \left[\Pi - \frac{1}{3} I \otimes I \right] T_2 = \left[\Pi - \frac{1}{3} I \otimes I \right] (T_1 + pI) = \\ &= \left[\Pi - \frac{1}{3} I \otimes I \right] T_1 = S_1 \end{aligned}$$

Se arriba a que $S_2 = S_1$. Introduciendo S_1 y S_2 en la ley constitutiva se concluye que $D(T_1) = D(T_2)$

ii) La velocidad de deformación obtenida mediante la ley constitutiva $D = f(S) S$, corresponde a un campo de velocidades isocóricas.

Aplicando la operación trazo se obtiene que $\text{tr} D = 0$, que equivale a la condición de isocoridad $\text{div } v = 0$.

iii) La tensión efectiva $T_e = (\frac{3}{2} S.S)^{1/2}$ y la velocidad de deformación efectiva $D_e = (\frac{2}{3} D.D)^{1/2}$ verifican una relación similar a la ley de NORTON, o sea $D_e = k T_e^n$

Para mostrar lo anterior multiplicamos escalarmente la ley constitutiva por sí misma, obteniendo:

$$\frac{2}{3} D.D = (k T_e^{n-1})^2 \frac{3}{2} S.S$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros y recordando la definición de T_e y D_e se tiene $D_e = k T_e^n$, que es lo que queríamos probar.

iv) En el caso particular de tensión uniaxial la ley constitutiva $D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$ se reduce a la ley de NORTON.

Para verificar que la ley de ODQVIST se reduce a la propuesta por NORTON en el caso uniaxial, basta recordar que si el tensor de tensiones tiene una única componente T_{11} , las componentes del tensor desviador S_{ij} y la tensión efectiva T_e resultan:

$$[S_{ij}] = [T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} T_{11} & & \\ & -\frac{1}{3} T_{11} & \\ & & -\frac{1}{3} T_{11} \end{bmatrix} ; T_e^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} = T_{11}^2$$

Introduciendo los valores anteriores en la expresión ;
 $D_{ij} = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S_{ij}$ se arriba a $D_{11} = k T_{11}^n$ que corresponde a la ley postulada por NORTON.

v) Existe una función escalar de variable tensorial $\Phi = \Phi(S)$ conocida como función potencial, a partir de la cual la ley constitutiva anterior puede ser derivada:

$$D(S) = \Phi_T = \frac{d\Phi}{dT}$$

Si $D(S)$ es la ley de ODQVIST la función Φ resulta:

$$\Phi(S) = \frac{k}{n+1} T_e^{n+1}$$

Por este motivo es que la ley de ODQVIST es denominada ley asociativa.

II.2.2. Inversión de la Ley Constitutiva.

La ley constitutiva de ODQVIST $D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$, conocida también como ley de VON-MISES-ODQVIST, es una transformación de elementos del espacio vectorial V en R , donde

$$V = \{S \in \text{Sym} : \text{tr } S = 0\}$$

$$R = \{D \in \text{Sym} : D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S, S \in V\}$$

A seguir mostraremos en primer término que dicha transformación o función $D(\cdot)$ tiene inversa y posteriormente veremos

la manera en que dicha inversa puede ser determinada.

Para ello definiremos previamente el dominio y el contradominio de la función $D(\cdot)$.

Tomaremos como dominio de $D(\cdot)$ todo el espacio V y como contradominio de $D(\cdot)$ el conjunto R .

De la manera en que ha sido definido R , se asegura que la transformación $D(\cdot)$ es sobre. Por tanto, la condición necesaria para asegurar la existencia de inversa es que $D(\cdot): V \longrightarrow R$ sea inyectiva. Tal propiedad será probada por el absurdo, o sea, se supondrá que la inyectividad no se verifica.

Admitiendo la no inyectividad de $D(\cdot)$ se sigue que existen elementos diferentes S_1 y S_2 a los cuales le corresponde i cual valor de D .

$$S_1 \in V, S_2 \in V, S_1 \neq S_2 \text{ corresponde } D = D(S_1) = D(S_2)$$

Explicitando la ley constitutiva para ambos valores de S , se tiene:

$$D = \frac{3}{2} k T_{e_1}^{n-1} S_1 = \frac{3}{2} k T_{e_2}^{n-1} S_2$$

donde

$$T_{e_1} = \left(\frac{3}{2} S_1 \cdot S_1 \right)^{1/2}, T_{e_2} = \left(\frac{3}{2} S_2 \cdot S_2 \right)^{1/2}$$

Si la igualdad anterior se verifica se sigue que:

$$S_2 = \alpha S_1 \quad \text{donde} \quad \alpha = \left[\frac{T_{e_1}}{T_{e_2}} \right]^{n-1} = \left[\frac{S_1 \cdot S_1}{S_2 \cdot S_2} \right]^{\frac{n-1}{2}} \neq 1$$

Introduciendo $S_2 = \alpha S_1$ en la relación constitutiva se obtiene:

$$D = \frac{3}{2} k T_{e_1}^{n-1} S_1 = \frac{3}{2} k T_{e_1}^{n-1} S_1 \alpha^n$$

Dado que la igualdad anterior se verifica si y sólo si $\alpha = 1$, recordando que inicialmente fue admitido que $S_1 \neq S_2$ y por tanto $\alpha \neq 1$, se arriba a una contradicción.

De lo anterior, concluimos que la función $D(.): V \rightarrow R$ es inyectiva, lo que nos permite asegurar la existencia de una única inversa $S = S(D)$ tal que $S(.): R \rightarrow V$

Previamente a determinar la inversa de

$$D = f(S) S \quad \text{donde} \quad f(S) = \frac{3}{2} k \left(\frac{3}{2} S.S \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

observamos que, dada la inyectividad de $D(.)$, existe una función $g(D)$ definida en el contradominio R que cierra el ciclo, como muestra la figura II.4. Dicha función permite expresar la inversa $S = S(D)$ en la siguiente forma:

$$S = S(D) = \frac{D}{g(D)}$$

donde; $g(.): D \in R \rightarrow R$ está definida por la relación

$$g(D) = f(S) = \frac{3}{2} k \left[\frac{3}{2} S.S \right]^{\frac{n-1}{2}}$$

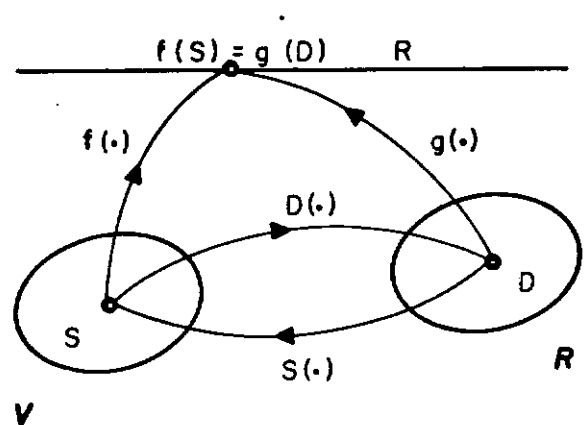


fig. II.4.

De lo anterior se sigue que es necesario en primer término determinar la función $g(D)$.

Para obtener $g(D)$ partimos de la siguiente relación, ver figura II.4.

$$f(S) = f \left[\frac{D}{g(D)} \right] = g(D)$$

Particularizando la relación anterior para la función: $f(S) = \frac{3}{2} k \left(\frac{3}{2} S.S \right)^{\frac{n-1}{2}}$, se tiene:

$$\frac{3}{2} k \left[\frac{3}{2} D.D \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{g(D)^{n-1}} = g(D)$$

Recordando la definición de velocidad de deformación efectiva D_e , se deduce que $g(D)$ está dada por:

$$g(D) = \frac{3}{2} k \frac{1}{n} D_e^{\frac{n-1}{n}}$$

Obtenida $g(D)$, la inversa de la ley constitutiva de ODQVIST es inmediata

$$S = \frac{D}{g(D)} = \frac{2}{3} \frac{D_e^{\frac{1-n}{n}}}{k^{\frac{1}{n}}} D$$

Obsérvese que dado un campo de velocidades v isocórico

o sea que verifique que $\text{div } v = 0$, es posible determinar a partir de la ley anterior la tensión desviadora S correspondiente:

$$\begin{array}{ccc} v(t.q.\text{div } v=0) & \longrightarrow & D \longrightarrow S \\ & D = (\nabla v)^S & \text{Ley const. inversa} \end{array}$$

Al igual que en el caso de la ley constitutiva donde se vió que era posible encontrar una función $\phi = \phi(S)$ a partir de la cual dicha ley podía ser derivada, en el caso de la ley constitutiva inversa existe una función potencial $\psi = \psi(D)$ tal que:

$$S = \psi_D = \frac{d\psi}{dD}$$

Dicha función está dada por la siguiente expresión:

$$\psi = \psi(D) = \frac{n}{1+n} \frac{D_e^{\frac{1+n}{n}}}{k^n}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dD_e}{dD} = \frac{d}{dD} \left(\frac{2}{3} D \cdot D \right)^{1/2} = \frac{2}{3} \frac{D}{D_e}$ es fácil verificar que:

$$\psi_D = \frac{2}{3} \left[\frac{D_e^{1-n}}{k} \right]^{\frac{1}{n}} D = S$$

Finalmente observamos que los potenciales $\psi(D)$ y $\phi(S)$ verifican la siguiente relación $\psi = n \phi$.

Para mostrar lo anterior recordemos que la relación entre tensión efectiva y deformación efectiva está dada por:

$$D_e = k T_e^n .$$

Introduciendo este valor en la expresión $\psi(D)$, se si
gue:

$$\begin{aligned} \psi(D) &= \frac{n}{1+n} \left[\frac{D_e}{k} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{1+n} \left[\frac{k}{k} T_e^{n(1+n)} \right]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{n}{1+n} k T_e^{n+1} = n \Phi(S) . \end{aligned}$$

II.3. Ley Asociativa de TRESCA

Sean T_1 , T_2 y T_3 las tensiones principales en un punto de un cuerpo que experimenta deformaciones de creep. Admitamos que dichas tensiones verifican la siguiente relación $T_3 > T_2 > T_1$.

La ley asociativa de TRESCA postula que el tensor velocidad de deformación D referido a la terna principal tiene solamente dos componentes D_3 , D_1 , no nulas y que dichas componentes D_3 y D_1 son proporcionales a una potencia de la máxima diferencia entre las tensiones principales $T_3 - T_1$.

La relación constitutiva de creep, en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} D_1 &= -k (T_3 - T_1)^n \\ D_2 &= 0 \\ D_3 &= k (T_3 - T_1)^n \end{aligned}$$

donde; k y n son parámetros de cada material.

De la ley constitutiva anterior se sigue que la velocici

dad de deformación de creep no depende de la tensión intermedia T_2 .

Cuando se conocen las direcciones principales la ley anterior es de fácil aplicación. En muchos casos las ecuaciones a que se arriba son simples, permitiendo la obtención de soluciones exactas, tal como lo muestra WAHL²⁴ en uno de sus trabajos sobre creep en discos que giran a velocidad constante.

II.3.1. Propiedades de la Ley Asociativa de Tresca.

i) El movimiento de un cuerpo que satisface la ley anterior es isocórico.

Por la equivalencia que existe entre la condición de isocoridad y la expresión del trazo, basta verificar que $\text{tr } D = 0$

De la ley constitutiva se sigue que:

$$\text{tr } D = D_1 + D_2 + D_3 = -k (T_3 - T_1)^n + k (T_3 - T_1)^n = 0$$

ii) Si las tensiones T_3 y T_1 varían en una misma cantidad ΔT de manera tal, que la relación $T_3 > T_2 > T_1$ continúa verificándose se $T_3 + \Delta T > T_2 > T_1 + \Delta T$, las velocidades de deformación correspondientes no varían.

iii) En el caso particular de tensión uniaxial $T_3 \neq 0$ $T_1 = T_2 = 0$ la ley constitutiva $D_3 = k(T_3 - T_1)^n$ se reduce a la propuesta por NORTON, o sea $D_3 = k T_3^n$.

iv) Existe una función potencial $\Phi = \Phi(T_i)$ tal que

$$D_i = \frac{\partial \Phi}{\partial T_i}$$

Para la ley asociativa de TRESCA la función $\Phi(T_i)$ está dada por la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{k}{n+1} (T_3 - T_1)^{n+1}$$

Derivando Φ , es fácil verificar que:

$$D_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} = -k (T_3 - T_1)^n$$

$$D_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial T_2} = 0$$

$$D_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial T_3} = k (T_3 - T_1)^n$$

II.3.2. Inversa de la Ley Constitutiva.

Sean D_3 , D_2 , D_1 las velocidades de deformación de un material que verifica la ley de TRESCA, $D_3 > D_2 = 0 > D_1$. La diferencia máxima entre las correspondientes tensiones T_3, T_2, T_1 puede ser determinada a partir de la velocidad de deformación máxima D_3 .

De la relación constitutiva $D_3 = k(T_3 - T_1)^n$ se sigue que: $T_3 - T_1 = \left(\frac{D_3}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Observese que la tensión intermedia T_2 no queda determinada a partir de la ley constitutiva inversa.

En este caso existe una función potencial $\psi = \psi(D_3)$ a partir de la cual la relación constitutiva inversa puede ser derivada. Dicha función está dada por:

$$\psi(D_3) = \frac{n}{n+1} k^{-\frac{1}{n}} D_3^{\frac{1+n}{n}}$$

Es fácil verificar que:

$$\frac{d\psi}{dD_3} = \left(\frac{D_3}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = T_3 - T_1$$

II.4. Ley no Asociativa de VON MISES-TRESCA.

Admitamos al igual que en el caso de la ley asociativa de TRESCA que las tensiones principales T_i verifican que $T_3 > T_2 > T_1$, por tanto $T_3 - T_1$ es la máxima diferencia entre dichas tensiones.

Introducimos la siguiente ley de creep:

$$D_i = f(T_j) \frac{\partial g(T_j)}{\partial T_i}$$

donde f y g son funciones reales dadas:

$$f(T_j) = \frac{3}{2} k (T_3 - T_1)^{n-1}$$

$$g(T_j) = \frac{1}{2} S.S = \frac{1}{6} \left[(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2 \right]$$

En este caso las componentes de la velocidad de creep resultan:

$$D_1 = \frac{k}{2} (T_3 - T_1)^{n-1} (2T_1 - T_2 - T_3)$$

$$D_2 = \frac{k}{2} (T_3 - T_1)^{n-1} (2T_2 - T_1 - T_3)$$

$$D_3 = \frac{k}{2} (T_3 - T_1)^{n-1} (2T_3 - T_1 - T_2)$$

La ley constitutiva anterior fue introducida por COFFIN Jr. et al.²⁵ en el análisis de creep de recipientes de presión, y por ser una combinación de las anteriores, es denominada de VON MISES-TRESCA.

Dado que no existe un potencial, del cual dicha ley pueda ser derivada, es denominada no asociativa.

II.4.1. Inversa de la Ley Constitutiva.

Teniendo en cuenta que la diferencia máxima entre las tensiones principales $T_3 - T_1$ es igual a $S_3 - S_1$ la relación constitutiva de von MISES-TRESCA puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$D_i = \frac{3}{2} k (S_3 - S_1)^{n-1} S_i$$

Procediendo en forma similar al párrafo II.2.2. en que se determina la inversa de la ley de ODQVIST, introduciendo la función $g(D_k)$, se sigue que:

$$S_i = \frac{D_i}{g(D_j)}$$

donde $g(D_j) = f(S_j) = \frac{3}{2} k (S_3 - S_1)^{n-1}$

Para obtener $g(D_j)$ sustituimos $S_i = \frac{D_i}{g(D_j)}$ en la relación anterior, obteniéndose:

$$g(D_j) = \frac{3}{2} k \left[\frac{D_3 - D_1}{g(D_j)} \right]^{n-1}$$

De la igualdad anterior se deduce que:

$$g(D_j) = \left[\frac{3}{2} k (D_3 - D_1)^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Determinada $g(D_j)$, la inversa de la ley de von MISES - TRESCA, resulta:

$$S_i = \frac{D_i}{g(D_j)} = \left[\frac{3}{2} k (D_3 - D_1)^{n-1} \right]^{-\frac{1}{n}} D_i$$

II.4.2. Relación entre las leyes de von MISES-ODQVIST y von-MISES- TRESCA.

La ley tensorial de von MISES-ODQVIST $D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$ referida a la base ortogonal principal resulta:

$$D_i = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S_i$$

donde $T_e^2 = \frac{1}{2} \left[(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2 \right]$

T_1, T_2, T_3 tensiones principales

La ley de von MISES-TRESCA puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$D_i = \frac{3}{2} k (T_3 - T_1)^{n-1} S_i$$

admitiendo que las tensiones principales T_i verifican la desigualdad $T_3 > T_2 > T_1$.

En ambas leyes las componentes de D son obtenidas a partir de las componentes de S . En la primera multiplicando por la función de tensiones T_e^{n-1} , que depende de la tensión intermedia T_2 y en la segunda por $(T_3 - T_1)^{n-1}$ que no depende de la tensión T_2 .

En el caso particular de que $T_3 > T_2 = T_1$, la tensión efectiva resulta $T_e = T_3 - T_1$ y la ley de von MISES-ODQVIST coincide con la de von MISES-TRESCA.

II.5. Generalización de la Ley Constitutiva.

A continuación veremos una forma de obtener una expresión más general de la ley constitutiva de creep secundario. Dicha generalización será realizada dentro de las siguientes hipótesis:

- i) La velocidad de deformación es función del estado tensional: $D = D(T)$

- ii) La función $D(T)$ es impar: $-D(-T) = D(T)$
- iii) La relación $D = D(T)$ es isotrópica: $Q D Q^T = D[Q T Q^T]$
donde $Q Q^T = I$
- iv) La deformación de creep se procesa a volumen constante
($\text{tr } D = 0$)

Analizaremos en primer término el caso de tensión uniaxial y posteriormente generalizaremos la aproximación propuesta al caso triaxial.

Los resultados experimentales obtenidos en ensayos de tracción y compresión simples serán aproximados mediante una función: $D_{11} = D_{11}(T_{11})$.

Recordando que en un estado uniaxial de tensiones se verifica la siguiente relación entre tensiones T_{ii} y tensiones desviadoras S_{ii} :

$$S_{11} = \frac{2}{3} T_{11}, \quad S_{22} = -\frac{1}{3} T_{11}, \quad S_{33} = -\frac{1}{3} T_{11}$$

La ley constitutiva $D_{11} = D_{11}(T_{11})$, puede también ser expresada en función de la tensión desviadora $D_{11} = D_{11}(S_{11})$.

En la aproximación de $D_{11} = D_{11}(S_{11})$ emplearemos un polinomio de potencias impares:

$$D_{11} = D_{11}(S_{11}) = \alpha_1 S_{11} + \alpha_3 S_{11}^3 + \alpha_5 S_{11}^5 + \dots$$

que verifica las dos relaciones siguientes:

$$D_{11}(0) = 0; \quad -D_{11}(-S_{11}) = D_{11}(S_{11})$$

La expresión polinomial anterior sugiere la siguiente

generalización²⁶:

$$D = \alpha_1 S + \alpha_3 S^3 + \alpha_5 S^5 + \dots$$

En el caso particular de tensión uniaxial la componente D_{11} resulta:

$$D_{11} = \alpha_{11} S_{11} + \alpha_3 S_{11}^3 + \alpha_5 S_{11}^5 + \dots$$

Las potencias de S no son independientes. Mediante el teorema de CARLEY-HAMILTON^{34,35}:

$$S^3 = J_2 S + J_3 I$$

donde:

$$J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S, \quad J_3 = \det S = \frac{1}{3} \operatorname{tr} S^3$$

es posible expresar S^{2n+1} ($n=1,2,\dots$) en función de I, S y S^2 .

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} S^5 &= J_2^2 S + J_3 S^2 + J_2 J_3 I \\ S^7 &= (J_2^3 + J_3^2) S + J_2^2 J_3 I + 2 J_2 J_3 S^2 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que D puede ser representada por la relación siguiente:

$$D = p_1 I + p_2 S + p_3 S^2$$

donde p_1, p_2, p_3 son polinomios de J_2 y J_3 .

Exigiremos a seguir que las deformaciones sean a volumen constante, o sea que $\text{tr } D = 0$

$$\text{tr } D = 3p_1 + 2p_3 J_2 = 0$$

de la relación anterior se sigue que:

$$p_1 = -\frac{2}{3} p_3 J_2$$

Introduciendo esta relación en $D = p_1 I + p_2 S + p_3 S^2$ se obtiene para la ley constitutiva la siguiente expresión:

$$D = p_2 S + p_3 \left[S^2 - \frac{2}{3} J_2 I \right]$$

Las leyes de creep más conocidas pueden obtenerse como casos particulares de la expresión anterior.

Haciendo $p_3 = 0$, $p_2 = \frac{3}{2} k (3J_2)^{\frac{n-1}{2}}$ se tiene, por ejemplo, la ley de von MISES- ODQVIST.

II.6. Problema de Valor de Contorno en Creep Secundario.

Sea un cuerpo material que experimenta deformaciones lentas en régimen estacionario. Admitamos que dicho cuerpo, que ocupa una región Ω de contorno Γ del espacio euclideo tridimensional, está sometido a un sistema de fuerzas (b, \bar{a}) :

$$b = b(X) \quad \text{en } \Omega, \quad \text{fuerza de volumen}$$

$$\bar{a} = \bar{a}(X) \quad \text{en } \Gamma_T, \quad \text{fuerza de superficie}$$

y una velocidad prescripta \bar{v} :

$$\bar{v} = \bar{v}(X) \quad \text{en} \quad \Gamma_v$$

donde Γ_T, Γ_v son las partes del contorno Γ donde están especificadas fuerzas de superficie y velocidades respectivamente, figura II.5.

El problema de valor de contorno en creep secundario, consiste en determinar los campos:

$v = v(X)$ Vector Velocidad

$D = D(X)$ Tensor velocidad de deformación

$T = T(X)$ Tensor de tensiones

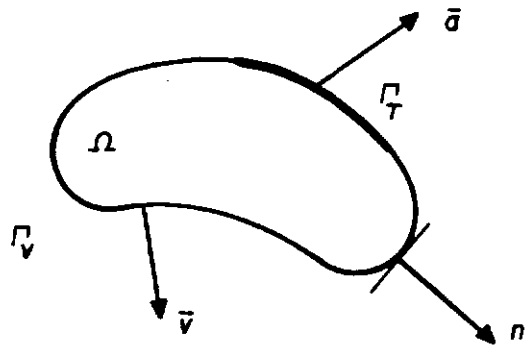


fig.II.5.

que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio

$$\text{div } T + b = \rho \ddot{x} \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones cinemáticas

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones constitutivas

$$S = \frac{D}{g(D)} \quad \text{en } \Omega$$

con las condiciones de contorno:

$$Tn = \bar{a} \quad \text{en } \Gamma_T ; \quad v = \bar{v} \quad \text{en } \Gamma_v$$

II.7. Ejemplos de Aplicación.

A seguir presentaremos tres ejemplos de aplicación del problema de valor de contorno de creep secundario. En todos ellos según la ley constitutiva empleada es posible arribar a soluciones exactas.

En el Ejemplo 1, se analiza el caso de una esfera hueca con presión interna, constituida de un material que verifica la ley constitutiva de creep secundario conocida como ley de von MISES-ODQVIST.

En el Ejemplo 2, se estudia el caso de un tubo infinito sometido a presión interna constituido de un material que verifica la misma ley del ejemplo anterior.

En el Ejemplo 3, se presenta el problema de creep en discos huecos que giran a velocidad constante, analizándose diferentes leyes constitutivas. Para el caso de la ley asociativa de TRESCA se determina la solución exacta correspondiente.

Estos ejemplos serán analizados posteriormente a traves de la formulación variacional elasto/viscoplástica conjunta mente con el Método de Elementos Finitos.

EJEMPLO 1: Esfera hueca con presión interna.

Sea una esfera hueca de pared espesa, radio interno r_i y radio externo r_e , sometida a una presión interna constante p , constituida de un material que satisface la ley de von MISES-ODQVIST.

Teniendo en cuenta la simetría esférica tanto en la geometría como en las cargas es conveniente emplear coordenadas

esféricas r, ϕ, θ .

En dichas coordenadas, las funciones a ser determinadas dependen solamente de r . Las componentes de los tensores T y S están dadas por las expresiones:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_r & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi & 0 \\ 0 & 0 & T_\phi \end{bmatrix} ; [S_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(T_r - T_\phi) & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi - T_r & 0 \\ 0 & 0 & T_\phi - T_r \end{bmatrix}$$

y la tensión efectiva T_e , mediante la relación:

$$T_e = \left(\frac{3}{2} S.S \right)^{1/2} = |T_r - T_\phi|$$

donde $|\cdot|$ representa el valor absoluto.

Como se verá más adelante, en este caso particular se verifica en todo el intervalo $r_i \leq r \leq r_e$, la siguiente desigualdad entre las tensiones $T_\phi > T_r$, por lo que la tensión efectiva puede ser reescrita como; $T_e = T_\phi - T_r$

i) *Ecuación de equilibrio.*

Admitiendo que las fuerzas de volumen son nulas, la condición de equilibrio $\text{div } T + b = 0$ se reduce en este caso a una relación entre T_r y T_ϕ dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT_r}{dr} + 2 \frac{T_r - T_\phi}{r} = 0$$

ii) *Ecuaciones cinemáticas.*

Dada la simetría esférica del problema, las componentes de D resultan:

$$D_{r\phi} = D_{r\theta} = D_{\phi\theta} = 0 \quad ; \quad D_r = \frac{dv}{dr} \quad ; \quad D_\phi = D_\theta = \frac{v}{r}$$

donde la velocidad $v = v(r)$ tiene la dirección de r .

iii) *Ecuación constitutiva.*

Tal como fue observado, este ejemplo será analizado para el caso de la ley de von MISES-ODQVIST, dada por $D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$.

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para $[D_{ij}]$, $[S_{ij}]$, y T_e , en coordenadas esféricas la ley de von MISES-ODQVIST se reduce a las siguientes expresiones:

$$D_r = -k(T_\phi - T_r)^n \quad ; \quad D_\phi = D_\theta = \frac{k}{2} (T_\phi - T_r)^n$$

iv) *Condiciones de contorno.*

La condición de contorno $T_n = \bar{a}$ en Γ_T pasa a ser :

$$T_r(r_i) = -p, \quad T_r(r_e) = 0$$

v) *Solución del problema de valor de contorno.*

De las ecuaciones constitutivas y cinemáticas se sigue que:

$$\text{tr } D = \frac{dv}{dr} + 2 \frac{v}{r} = 0$$

Integrando la ecuación diferencial anterior se obtiene la velocidad $v(r) = C_1 r^{-2}$, donde C_1 es una constante a ser determinada.

Del valor de $v(r)$ determinado y de la relación constitutiva $D_\phi = \frac{v}{r} = \frac{k}{2} (T_\phi - T_r)^n$ se sigue que:

$$T_\phi - T_r = \left(\frac{2C_1}{kr^3} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación de equilibrio e integrando obtenemos T_r .

$$T_r = -\frac{2}{3} n \left(\frac{2C_1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} r^{-\frac{3}{n}} + C_2$$

La otra tensión T_ϕ estará dada por:

$$T_\phi = \left(\frac{2C_1}{kr^3} \right)^{\frac{1}{n}} + T_r = \left(1 - \frac{2}{3}n \right) \left(\frac{2C_1}{kr^3} \right)^{\frac{1}{n}} + C_2$$

Haciendo que la tensión T_r verifique las condiciones de contorno $T_r(r_i) = -p$, $T_r(r_e) = 0$ se obtienen las expresiones de C_1 y C_2 .

$$C_1 = \frac{k}{2} \left[\frac{3p}{2n(r_e^{\frac{3}{n}} - r_i^{\frac{3}{n}})} \right]^n r_e^3 r_i^3$$

$$C_2 = p \frac{r_i^{\frac{3}{n}}}{r_e^{\frac{3}{n}} - r_i^{\frac{3}{n}}}$$

Introduciendo C_1 y C_2 en las expresiones de v , T_r , T_ϕ se tiene la solución exacta del problema:

$$T_r = \frac{p}{\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\frac{3}{n}} - 1} \left[1 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} \right]$$

$$T_{\phi} = \frac{p}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{3}{n}} - 1} \left[1 + \left(\frac{3}{2n} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{3}{n}} \right]$$

$$v = \frac{k}{2} \left[\frac{\frac{3p}{2n}}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{3}{n}} - 1} \right]^n \frac{r_e^3}{r^2}$$

Observase que para $n=1$ las expresiones de T_r y T_{ϕ} coinciden con las obtenidas en la teoría elástica.

Nótese además que como $n \geq 1$ se verifica que $T_{\phi} > T_r$ en todo el intervalo $r_i \leq r \leq r_e$.

Los valores de las tensiones T_{ϕ} , T_r y de la velocidad v , obtenidos a partir de la solución exacta para el caso de una esfera hueca con relación de radios $r_e/r_i = 1.5$ y diferentes valores de n ($n = 1, 2, 6$) son presentados en la figura V.17.

EJEMPLO 2: Tubo circular infinito.

Analizaremos a seguir el caso de un tubo circular infinito de pared espesa, radio interior r_i , radio exterior r_e , sometido a presión interna y constituido de un material que satisface la ley de von MISES-ODQVIST^{28,29}.

Dada la axisimetría del problema es conveniente emplear coordenadas cilíndricas r, ϕ, z .

En dichas coordenadas las componentes de T fuera de la diagonal son nulas $T_{r\phi} = T_{rz} = T_{\phi z} = 0$ y las componentes de

T y S están dadas por las expresiones:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_r & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi & 0 \\ 0 & 0 & T_z \end{bmatrix}$$

$$[S_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2T_r - (T_\phi + T_z) & 0 & 0 \\ 0 & 2T_\phi - (T_r + T_z) & 0 \\ 0 & 0 & 2T_z - (T_r + T_\phi) \end{bmatrix}$$

La tensión efectiva T_e en este caso resulta:

$$T_e^2 = \left(\frac{3}{2} S.S \right) = \frac{1}{2} \left[(T_r - T_\phi)^2 + (T_\phi - T_z)^2 + (T_z - T_r)^2 \right]$$

i) *Ecuación de equilibrio.*

La condición de equilibrio $\text{div } T + b = 0$ para fuerzas de volumen nulas, se reduce en este caso a las siguientes relaciones diferenciales de T_r , T_ϕ y T_z :

$$r \frac{dT_r}{dr} + T_r - T_\phi = 0 \quad ; \quad \frac{dT_z}{dz} = 0$$

ii) *Ecuaciones cinemáticas.*

Dado que nuestro problema es un estado plano de deformación a xisimétrico, donde los desplazamientos en la dirección de z es tán impedidos, las componentes de D en coordenadas cilíndricas

resultan

$$D_{r\phi} = D_{rz} = D_{\phi z} = 0 \quad , \quad D_r = \frac{dv}{dr} \quad ; \quad D_\phi = \frac{v}{r} \quad ; \quad D_z = 0$$

iii) *Relaciones constitutivas.*

Admitiremos que el material satisface la ley de von MISES-ODQ - VIST.

Teniendo en cuenta las expresiones de $[D_{ij}]$, $[S_{ij}]$ y T_e para este caso, la ley constitutiva $D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$. se reduce a las relaciones entre componentes

$$D_r = k T_e^{n-1} \left(T_r - \frac{T_\phi}{2} - \frac{T_z}{2} \right)$$

$$D_\phi = k T_e^{n-1} \left(T_\phi - \frac{T_r}{2} - \frac{T_z}{2} \right)$$

$$D_z = k T_e^{n-1} \left(T_z - \frac{T_\phi}{2} - \frac{T_r}{2} \right)$$

Recordando que por ser un estado plano de deformación se verifica que $D_z = 0$, de la última relación constitutiva se concluye que:

$$T_z = \frac{1}{2} (T_\phi + T_r)$$

Introduciendo el valor de T_z en $[S_{ij}]$ y T_e se sigue que:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (T_r - T_\phi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (T_\phi - T_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} |T_r - T_\phi|$$

Dado que la desigualdad $T_\phi > T_r$ se verifica en todo el intervalo $r_i \leq r \leq r_e$, la tensión efectiva puede ser reescrita en este caso como:

$$T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (T_\phi - T_r)$$

iv) *Condiciones de contorno.*

Las condiciones de contorno $T_n = \bar{a}$ en Γ_T pasa a ser $T_r(r_i) = -p$, $T_r(r_e) = 0$

v) *Solución del problema de valor de contorno.*

Las ecuaciones del problema de valor de contorno correspondientes a un cilindro infinito se reducen a:

$$r \frac{dT_r}{dr} + T_r - T_\phi = 0, \quad T_z = \frac{1}{2} (T_r + T_\phi)$$

$$D_r = \frac{3}{4} k T_e^{n-1} (T_r - T_\phi)$$

$$D_\phi = -\frac{3}{4} k T_e^{n-1} (T_r - T_\phi), \quad D_z = 0$$

donde $T_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (T_\phi - T_r)$

De la condición de incompresibilidad ($\text{tr } D = 0$) se si
gue:

$$\text{tr } D = D_r + D_\phi + D_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0$$

Integrando la ecuación diferencial anterior se obtiene:

$$v(r) = C_1 r^{-1}$$

De la relación constitutiva $D_\phi = \frac{v}{r} = \frac{3}{4} k T_e^{n-1} (T_\phi - T_r)$
y del valor $v(r)$ determinado se tiene que:

$$T_\phi - T_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_1}{kr^2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación de
equilibrio e integrando arribamos a la expresión de T_r

$$T_r = - \frac{n}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_1}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{2}{r} + C_2$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno

$$T_r(r_i) = -p, \quad T_r(r_e) = 0$$

las constantes C_1 y C_2 resultan:

$$C_1 = \frac{k\sqrt{3}}{2} r_e^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{n} \frac{p}{\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\frac{2}{n}} - 1} \right]^n$$

$$C_2 = \frac{p}{\frac{2}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}}$$

Introduciendo los valores de C_1 y C_2 en las expresiones de v , T_r , T_ϕ , T_z se arriba a la solución del problema de valor de contorno:

$$T_r = - \frac{p}{\frac{2}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}} \left[\left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2}{n}} - 1 \right]$$

$$T_\phi = \frac{p}{\frac{2}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}} \left[\left(\frac{2}{n} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2}{n}} + 1 \right]$$

$$T_z = \frac{T_\phi + T_r}{2} = \frac{p}{\frac{2}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}} \left[\left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r}\right)^{\frac{2}{n}} + 1 \right]$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} k \left\{ \frac{\sqrt{3}p}{n \left[\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{\frac{n}{2}} - 1 \right]} \right\}^n \frac{r_e}{r}$$

Las tensiones T_r , T_ϕ , T_z y la velocidad v en un cilindro infinito, con una relación de radios $r_e/r_i = 4$ y diferen-

tes valores de n ($n=1,2,6$) son presentados en la figura V.18.

Obsérvese que para $n=1$ las expresiones de T_r , T_ϕ , T_z coinciden con las de la teoría elástica^{27,28}.

EJEMPLO 3: Disco Hueco girando a velocidad constante.

Sea un disco hueco de espesor constante h , radio interno r_i y radio externo r_e , que gira alrededor de su eje a velocidad constante ω ²⁸.

Si el espesor del disco es pequeño en comparación a su diámetro, el estado tensional interno puede ser aproximado mediante el estado plano de tensiones. Teniendo en cuenta la simetría de revolución tanto de la geometría como de la carga, el correspondiente estado plano de tensiones resultaría además axisimétrico.

Lo anterior implica, empleando coordenadas cilíndricas θ, r, z , que las únicas componentes no nulas T_θ y T_r del tensor de tensiones T son solamente funciones de r .

$$T_z = T_{r\theta} = T_{rz} = T_{z\theta} = 0 ; \quad T_\theta = T_\theta(r) ; \quad T_r = T_r(r)$$

En coordenadas cilíndricas los tensores T y S están dados por:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_r & 0 & 0 \\ 0 & T_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [S_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2T_r - T_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 2T_\theta - T_r & 0 \\ 0 & 0 & -T_r - T_\theta \end{bmatrix}$$

y la tensión efectiva T_e por; $T_e = (T_r^2 - T_r T_\theta + T_\theta^2)^{1/2}$

i) *Ecuación de equilibrio.*

Admitiendo que las fuerzas de masa son despreciables frente a las fuerzas de inercia y teniendo en cuenta las características del movimiento, las fuerzas de inercia tienen solamente componente radial. La condición de equilibrio $\text{div } T + b = \rho \ddot{x}$ se reduce en este caso a una relación entre las tensiones T_r y T_θ dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dr} (rT_r) - T_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0$$

donde ρ es la masa específica del disco y ω la velocidad angular.

ii) *Cinemática de la deformación.*

En el caso de estado plano axisimétrico, las componentes de D en coordenadas θ, r, z resultan:

$$D_{\theta r} = D_{rz} = D_{z\theta} = 0 \quad ; \quad D_r = \frac{dv_r}{dr} \quad , \quad D_\theta = \frac{v_r}{r} \quad , \quad D_z = \frac{dv_z}{dz}$$

donde v_r y v_z son las componentes de la velocidad v en las direcciones r y z .

Recordando que las deformaciones de creep se producen a volumen constante ($\text{tr } D = 0$), se sigue que las componentes de D verifican la relación

$$\text{tr } D = D_r + D_\theta + D_z = \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} + \frac{dv_z}{dz} = 0$$

iii) *Relaciones constitutivas.*

El caso de discos girando a velocidad constante será analizado para las diferentes relaciones constitutivas estudiadas anteriormente, o sea para las leyes de von MISES-ODQVIST , TRESCA y von MISES-TRESCA.

Superado el valor del tiempo t^* que separa las zonas de creep transiente y creep en régimen estacionario, la velocidad de deformación D se mantiene constante. Su dependencia no lineal del estado de tensiones, está implícita en las relaciones constitutivas presentadas.

En el caso particular de un disco hueco girando a velocidad constante sin tensiones en el contorno $T_r(r_i) = T_r(r_e) = 0$, que nos proponemos analizar , las tensiones tanto elásticas como de creep verifican la siguiente desigualdad:

$$T_\theta > T_r > T_z = 0 \quad \text{para} \quad r_i < r < r_e$$

En los extremos $r = r_i$ y $r = r_e$, T_r se anula, verificándose por lo tanto que: $T_\theta > T_r = T_z = 0$.

Identificando las direcciones 1,2,3 con z, r, θ , e introduciendo la condición $T_z = 0$ en las expresiones generales de las leyes constitutivas de von MISES-ODQVIST, TRESCA y von MISES-TRESCA se obtienen las leyes particulares a ser empleadas en nuestro problema:

Ley Asociativa von MISES-ODQVIST

$$D_\theta = \frac{k}{2} T_e^{n-1} (2T_\theta - T_r)$$

$$D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S$$

$$D_r = \frac{k}{2} T_e^{n-1} (2T_r - T_\theta)$$

$$D_z = - \frac{k}{2} T_e^{n-1} (T_r + T_\theta)$$

$$\text{donde } T_e = (T_r^2 - T_r T_\theta + T_\theta^2)^{1/2}$$

Ley Asociativa de TRESCA.

$$D_1 = -k (T_3 - T_1)^n$$

$$D_z = -k T_\theta^n$$

$$D_2 = 0$$

$$D_r = 0$$

$$D_3 = k (T_3 - T_1)^n$$

$$D_\theta = k T_\theta^n$$

Ley No Asociativa de von MISES-TRESCA.

$$D_\theta = \frac{k}{2} T_\theta^{n-1} (2T_\theta - T_r)$$

$$D = \frac{3}{2} k (T_3 - T_1')^{n-1} S$$

$$D_r = \frac{k}{2} T_\theta^{n-1} (2T_r - T_\theta)$$

$$D_z = - \frac{k}{2} T_\theta^{n-1} (T_r + T_\theta)$$

Es conveniente hacer notar que el problema de discos huecos girando a velocidad constante solamente tiene solución exacta para el caso de ley de TRESCA, no así en los otros casos donde solamente es posible obtener soluciones aproximadas. Por tal motivo presentaremos a seguir la determinación de la solución exacta para la ley de TRESCA y posteriormente en un caso particular mostraremos los valores obtenidos mediante la solu-

ción exacta y mediante métodos numéricos para la leyes de von MISES-ODQVIST y von MISES-TRESCA, obtenidos por WAHL^{24,30,31} en sus trabajos sobre creep en discos.

iv) *Solución del Problema de Creep en Discos de materiales que verifican la Ley de TRESCA.*

Si el material del disco verifica la ley de TRESCA el problema de valor de contorno se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dr} (rT_r) - T_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0$$

$$\frac{v_r}{r} = k T_\theta^n, \quad \frac{dv_r}{dr} = 0, \quad \frac{dv_z}{dz} = -k T_\theta^n$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$T_r(r_i) = T_r(r_e) = 0$$

De la condición $\frac{dv_r}{dr} = 0$ se sigue que $v_r = C_1$. Introduciendo este resultado en $\frac{v_r}{r} = k T_\theta^n$ se obtiene el valor de T_θ .

$$T_\theta = \left(\frac{C_1}{kr}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sustituyendo T_θ en la ecuación de equilibrio se sigue que:

$$\frac{d}{dr} (rT_r) = \left(\frac{C_1}{kr}\right)^{\frac{1}{n}} - \rho\omega^2 r^2$$

Integrando la expresión anterior se arriba al valor de

T_r :

$$T_r = \frac{n}{n-1} \left(\frac{C_1}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{3} \rho \omega^2 r^2 + C_2 r^{-1}$$

Las constantes C_1 y C_2 son determinadas a partir de las condiciones de contorno $T_r(r_i) = T_r(r_e) = 0$, resultando:

$$C_1 = k \left[\frac{(n-1) \rho \omega^2 (r_e^3 - r_i^3)}{3n \left(r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}} \right)} \right]^n$$

$$C_2 = -\frac{1}{3} \rho \omega^2 \frac{r_e^3 r_i^{\frac{n-1}{n}} - r_i^3 r_e^{\frac{n-1}{n}}}{r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}}}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en las expresiones de v_r , T_θ y T_r se tiene la solución exacta del problema de creep en discos que giran a velocidad constante

$$v_r = C_1 = k \left[\frac{(n-1) \rho \omega^2 (r_e^3 - r_i^3)}{3n \left(r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}} \right)} \right]^n$$

$$T_\theta = \left(\frac{C_1}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(n-1) \rho \omega^2 (r_e^3 - r_i^3)}{3n \left(r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}} \right)} r^{-\frac{1}{n}}$$

$$T_r = \frac{\rho \omega^2}{3r} \left[\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}}} (r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}}) - (r^3 - r_i^3) \right]$$

La velocidad en la dirección de z es obtenida integrando la relación:

$$\frac{dv_z}{dz} = -k T_\theta^n = -\frac{C_1}{r}$$

Admitiendo que $v_z(z=0)=0$ se sigue que:

$$v_z = -k \left[\frac{(n-1) \rho \omega^2 (r_e^3 - r_i^3)}{3n (r_e^{\frac{n-1}{n}} - r_i^{\frac{n-1}{n}})} \right] r^{-1} z$$

v) Ejemplo Numérico.

Fue analizado el siguiente ejemplo.

Disco hueco de radio interior $r_i = 1.25$ in, radio exterior $r_e = 6$ in que gira a velocidad constante $\omega = 15000$ rpm, con masa específica $\rho = 7.35 \times 10^{-4}$ lb seg²/in⁴.

Los resultados obtenidos empleando la solución exacta para el caso de la ley de TRESCA y mediante integración numérica de las ecuaciones diferenciales para los casos de ley de von MISES-ODQVIST y von MISES-TRESCA^{30, 24} son presentados en las figuras v.19-20-21.

En ellas se compara las tensiones obtenidas para cada ley de creep y diferentes valores de n ($n=4,6,9$) con la correspondiente solución elástica.

Finalmente en la figura V.22 se presentan las tensiones obtenidas empleando las tres leyes constitutivas para $n=6$. En dicha figura puede observarse que las tensiones T_r prácticamente coinciden y que existen pequeñas diferencias en los valores de T_θ para cada ley de creep.

II.8. Principios Variacionales en Creep.

La ecuación constitutiva del problema que estamos interesados en resolver impone restricciones al campo de velocidades v , derivada de la condición de que $\text{tr } D = 0$.

Recordando la relación cinemática $D = (\nabla v)^S$ y la definición de divergencia de un vector $\text{div } v = \text{tr } (\nabla v)$ se sigue que

$$\text{tr } D = \text{tr}(\nabla v)^S = \text{tr } \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = \text{tr}(\nabla v) = \text{div } v.$$

por tanto la condición $\text{tr } D = 0$ implica que el campo de velocidades v verifique que $\text{div } v = 0$.

Definamos a seguir dos campos $\text{Kin}.v$ y $\text{Var}.v$ que serán de utilidad para enunciar los principios variacionales en el caso de movimientos isocóricos.

i) $\text{Kin}.v$; campo de velocidades cinematicamente admisibles, cu

Los elementos son suficientemente regulares, están definidos en todo punto $X \in \Omega$, verifican que su divergencia es nula y satisfacen condiciones de contorno en Γ_v .

A cada elemento de dicho espacio lo designaremos con v^* .

$$\text{Kin.}v = \{v^* = v^*(X) ; \text{regular, } \text{div } v^* = 0 \text{ en } X \in \Omega, v^* = \bar{v} \text{ en } X \in \Gamma_v\}$$

- ii) Var. v ; campo de variaciones admisibles de velocidad, cuyos elementos que notaremos con \hat{v} , son suficientemente regulares, están definidos en todo $X \in \Omega$, verifican que su divergencia es nula y satisfacen condiciones de contorno homogéneas en Γ_v .

$$\text{Var. } v = \{\hat{v} = \hat{v}(X); \text{regular, } \text{div } \hat{v} = 0 \text{ en } X \in \Omega, \hat{v} = 0 \text{ en } X \in \Gamma_v\}$$

Designemos con D^* y \hat{D} los tensores velocidades de deformación relacionados con v^* y \hat{v} respectivamente:

$$D^* = (\nabla v^*)^S, \quad \hat{D} = (\nabla \hat{v})^S$$

Empleando los espacios definidos anteriormente, el Principio de la Potencia Virtual, que establece la igualdad entre la potencia virtual externa y la interna, puede ser enunciado como el siguiente problema variacional:

Determinar $v \in \text{Kin.}v$ tal que la igualdad:

$$\int_{\Omega} b \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega} T \cdot \hat{D} \, d\Omega$$

se verifique para cualquier $\hat{v} \in \text{Var. } v$, con las condiciones subsidiarias:

Ecuación cinemática:

$$D = (\nabla v)^S \quad (\text{velocidad de deformación cinemáticamente admisible})$$

Ecuación constitutiva:

$$T = p I + \frac{D}{g(D)} \quad (\text{tensión de creep cinemáticamente admisible})$$

Introduciendo la ley constitutiva $T = p I + \frac{D}{g(D)}$ en la expresión del Principio de la Potencia Virtual y teniendo en cuenta que $\text{tr } \hat{D} = \hat{D} \cdot I = 0$, se arriba a que nuestro problema de valor de contorno equivale al problema variacional siguiente:

Determinar $v \in \text{Kin.}v$ tal que la igualdad:

$$\int_{\Omega} b \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{D}{g(D)} \cdot \hat{D} \, d\Omega$$

se verifique para cualquier $\hat{v} \in \text{Var.}v$, con la condición subsidiaria $D = (\nabla v)^S$

II.8.1. Principio Variacional de Mínima Energía.

Si la ecuación constitutiva deriva de un potencial $\Psi = \Psi(D)$, la solución del problema variacional anterior equiva-

le a la determinación del mínimo de un funcional que designaremos con $\Pi(v)$ ³².

Dicho funcional $\Pi(v)$, conocido como funcional energía, puede ser derivado a partir del Principio de la Potencia Virtual y de la ley constitutiva de creep secundario.

Previamente expresaremos la variación de la velocidad \hat{v} como diferencia entre dos elementos v^* del espacio de velocidades cinemáticamente admisibles.

Si una de ellas coincide con la solución del problema v , se tiene que:

$$\hat{v} = v^* - v$$

A ambos valores v^* y v , le corresponden las siguientes velocidades de deformación:

$$D^* = (\nabla v^*)^S \quad D = (\nabla v)^S$$

Cuya diferencia $\hat{D} = D^* - D$ es la variación de la velocidad de deformación.

Según vimos, cuando la tensión $S = S(D)$ deriva de un potencial la misma puede expresarse como

$$S = \frac{d\psi}{dD} = \psi_D$$

Introduciendo la relación anterior en el Principio de la Potencia Virtual y teniendo en cuenta que $\hat{v} = v^* - v$ y $\hat{D} = D^* - D$, se sigue que:

$$\int_{\Omega} b \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a} (v^* - v) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{d\psi}{dD} \cdot (D^* - D) d\Omega$$

Si $\psi(D)$ es convexa, satisface la siguiente desigualdad.

$$\psi^* - \psi \geq \psi_D \cdot (D^* - D)$$

donde

$$\psi^* = \psi(D^*) \quad , \quad \psi = \psi(D)$$

y en que el signo igual se verifica s ı y s olo si $D^* = D$. En e se caso de la expresión variacional anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^* d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v^* d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot v^* d\Gamma &\geq \\ \int_{\Omega} \psi d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot v d\Gamma \end{aligned}$$

Arribamos por tanto a la expresión del Principio Variacional de Mínima Energía, que puede ser enunciado en la siguiente forma:

De todas las velocidades v^* cinematicamente admisibles ($v^* \in \text{Kin.v}$) aquella velocidad v que hace mínimo al funcional:

$$\Pi(v^*) = \int_{\Omega} \psi^* d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v^* d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot v^* d\Gamma$$

con la condición subsidiaria $D^* = (\nabla v^*)^S$, es la solución del problema de valor de contorno en creep secundario.

II.8.2. Convexidad del Potencial de Creep.

Analizaremos a seguir la convexidad de los potenciales de creep correspondientes a las leyes asociativas de von MISES-ODQVIST y TRESCA.

Designando con $\Psi^* = \Psi(D^*)$ y $\Psi = \Psi(D)$, la diferencia $\Psi^* - \Psi$ desarrollada mediante serie de Taylor está dada por

$$\Psi^* - \Psi = \Psi_D \cdot (D^* - D) + \frac{1}{2} (D^* - D) \cdot \Psi_{DD} (D^* - D) + \dots$$

Del desarrollo anterior, se sigue que la condición de convexidad de Ψ dada por:

$$\Psi^* - \Psi \geq \Psi_D \cdot (D^* - D)$$

es satisfecha si Ψ_{DD} es positiva definida. Es decir si:

$$(D^* - D) \cdot \Psi_{DD} (D^* - D) \geq 0 \quad e = 0 \text{ si y sólo si } D^* = D$$

Lo anterior muestra que la convexidad del potencial de creep puede ser analizada estudiando su derivada segunda.

En el caso de la ley de von MISES-ODQVIST, $\Psi(D)$, Ψ_D y Ψ_{DD} están dados por:

$$\Psi(D) = \frac{n}{1+n} \frac{D_e^{\frac{1+n}{n}}}{k^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Psi_D = \frac{2}{3} \left[\frac{D_e^{1-n}}{k} \right]^{\frac{1}{n}} D = S$$

$$\Psi_{DD} = \frac{2}{3} k^{-\frac{1}{n}} \left[D_e^{\frac{1-n}{n}} \Pi + \frac{2}{3} \frac{(1-n)}{n} D_e^{\frac{1-3n}{n}} D \otimes D \right]$$

Luego, analizando Ψ_{DD} se tiene:

$$(D^*-D) \cdot \Psi_{DD}(D^*-D) = \frac{2}{3} k^{-\frac{1}{n}} \left\{ D_e^{\frac{1-n}{n}} (D^*-D) \cdot (D^*-D) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \frac{1-3n}{n} D_e^{\frac{1-3n}{n}} [D \cdot (D^*-D)]^2 \right\} \geq 0 \quad e = 0 \text{ sí y sólo sí } D^*=D$$

Por lo tanto el potencial de creep asociado a la ley de von MISES-ODQVIST es convexo.

En el caso de la ley de TRESCA $\Psi(D)$, Ψ_D , Ψ_{DD} están dados por:

$$\Psi(D) = \frac{n}{n+1} k^{-\frac{1}{n}} \frac{D_3^{\frac{1+n}{n}}}{k^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Psi_D = \left(\frac{D}{k}\right)^3 \frac{1}{n}$$

$$\Psi_{DD} = \frac{1}{n} k^{-\frac{1}{n}} D^{\frac{1-n}{n}}$$

Dado que $D_3 > 0$ resulta $\Psi_{DD} > 0$ lo que nos asegura la convexidad del potencial asociado a la ley de TRESCA.

II.8.3. Funcional de Dos Campos, Velocidad y Presión.

De acuerdo a como fue definido el espacio de velocidades cinemáticamente admisibles Kin.v , cada elemento $v^* \in \text{Kin.v}$ verifica la condición de isocoridad $\text{div } v^* = 0$.

Salvo el caso de estado plano donde con la introducción de la función de corriente es posible formar dicho espacio, en el caso tridimensional la obtención de Kin.v resulta difícil³³.

Por tal motivo es que se introduce la condición $\text{div } v = 0$ en el funcional de energía $\Pi(v)$, con lo que se arriba a un funcional de dos campos $\Pi_1(v, p)$; donde v es un elemento de un nuevo espacio de velocidades cinemáticamente admisibles Kin^*v definido por $\text{Kin}^*v = \{v^* = v^*(X); \text{regular}, v^* = \bar{v} \text{ en } \Gamma_v\}$ y p es un escalar denominado presión media.

Tomando el trazo de la ley constitutiva $T = S + pI$ se sigue que la relación entre p y T está dada por

$$p = \frac{1}{3} \text{tr } T$$

Para obtener $\Pi_1(v, p)$ procedemos de la siguiente manera.

Partimos del funcional de energía $\Pi(v)$ en el que introducimos la condición subsidiaria $\text{tr } D = 0$ multiplicada por p e integrada en todo el dominio Ω :

$$\begin{aligned}\Pi_1(v, p) &= \Pi(v) + \int_{\Omega} \text{tr } D p \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \Psi(D) \, d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \text{tr } D p \, d\Omega\end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones de EULER correspondientes al funcional $\Pi_1(v, p)$ efectuamos su primera variación:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1 &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial v} \cdot \hat{v} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial p} \hat{p} = \\ &= \int_{\Omega} (\Psi_D \cdot \hat{D} - b \cdot \hat{v} + \text{tr } D \hat{p} + \text{tr } \hat{D} p) \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\Psi_D = S$ y que $\hat{D} = (\nabla \hat{v})^S$, de la simetría de S se sigue que: $\Psi_D \cdot \hat{D} = S \cdot \nabla \hat{v}$. Introduciendo la expresión anterior en Π_1 y recordando además que: $\text{tr } \hat{D} = \hat{D} \cdot I = (\nabla \hat{v})^S \cdot I = \nabla \hat{v} \cdot I$, se tiene que:

$$\hat{\Pi}_1 = \int_{\Omega} (S + pI) \cdot \nabla \hat{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{tr } D \hat{p} \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma$$

De la relación:

$$(S + pI) \cdot \nabla \hat{v} = \operatorname{div} [(S + pI)^T \hat{v}] - \operatorname{div} (S + pI) \cdot \hat{v}$$

y del teorema de la divergencia se sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (S + pI) \cdot \nabla \hat{v} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} [(S + pI)^T \hat{v}] \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} (S + pI) \cdot \hat{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (S + pI)n \cdot \hat{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div} (S + pI) \cdot \hat{v} \, d\Omega \end{aligned}$$

Introduciendo el resultado anterior en la expresión $\hat{\Pi}_1$ y recordando que $\hat{v} = 0$ en Γ_v se arriba a la variación del funcional de dos campos:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= - \int_{\Omega} [\operatorname{div} (S + pI) + b] \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{tr} D \hat{p} \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_T} [(S + pI)n - \bar{a}] \cdot \hat{v} \, d\Gamma \end{aligned}$$

La condición de estacionaridad $\hat{\Pi}_1 = 0$ nos permite deducir las ecuaciones de EULER:

$$\operatorname{div} (S + pI) + b = 0 \quad , \quad \operatorname{tr} D = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y la condición natural de contorno:

$$(S + pI)n - \bar{a} = 0 \quad \text{en } \Gamma_T$$

De lo anterior concluimos que los campos $v \in \text{Kin}^*v$ y p , que hacen estacionario al funcional $\Pi_1(v, p)$, son la solución del problema de valor de contorno en creep secundario.

II.8.4. Determinación del Campo de Tensiones T.

Como se vio anteriormente la condición de estacionariedad del funcional de dos campos $\Pi_1(v, p)$, nos permite determinar la solución v, p de nuestro problema de valor de contorno.

De la ecuación cinemática $D = (\nabla v)^S$ y de las ecuaciones constitutivas $T = S + pI$, $S = \frac{D}{g(D)}$ es posible a partir de v y p obtener el estado de tensiones T en todo punto del cuerpo, con lo que nuestro problema queda totalmente resuelto.

Sin embargo si empleamos el Principio de Mínima Energía Potencial o sea, minimizamos el funcional $\Pi(v)$, determinamos solamente el campo de velocidades v .

A partir de dicho campo y teniendo en cuenta la ecuación constitutiva $S = \frac{D}{g(D)}$, es posible deducir la parte desviadora de T , restando por tanto determinar la presión media p .

Para encontrar p será necesario resolver el siguiente problema de equilibrio:

$$\text{div } (S + pI) + b = \text{div } S + \nabla p + b = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$(S + pI)n = S_n + p n = \bar{a} \quad \text{en } \Gamma_T$$

Admitiendo conocido S de forma única, de las relaciones anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned}\nabla p &= b^* && \text{en } \Omega \\ p &= \bar{a}_n^* && \text{en } \Gamma_T\end{aligned}$$

donde:

$$b^* = - (b + \operatorname{div} S) \quad ; \quad \bar{a}_n^* = (\bar{a} - S_n) \cdot n$$

Observamos además que el problema de valor de contorno a que arribamos en p , admite solución única.

En efecto, sean $p_2 \neq p_1$ dos soluciones del problema anterior, luego:

$$\begin{aligned}\nabla(p_2 - p_1) &= 0 && \text{en } \Omega \\ p_2 - p_1 &= 0 && \text{en } \Gamma_T\end{aligned}$$

La primera expresión nos dice que $p_2 - p_1 = \text{Cte}$ en todo Ω y la segunda que $p_2 - p_1 = 0$ en Γ_T .

De lo anterior concluimos que $p_2 = p_1$, resultando por tanto una única solución para p .

II.8.5. Unicidad de la Solución.

El resultado anterior, de única solución para p fue ob

tenido admitiendo que la tensión desviadora S era única.

La unicidad de S en los casos en que las leyes constitutivas derivan de un potencial es obvia puesto que existe un funcional de mínimo. Falta por tanto mostrar la unicidad en el caso de que la ley constitutiva no deriva de un potencial por ejemplo para la ley no asociativa de von MISES-TRESCA dada por:

$$D_i = \frac{3}{2} k (S_3 - S_1)^{n-1} S_i \quad (T_3 > T_2 > T_1)$$

$$\text{y su inversa por } S_i = \left(\frac{3}{2} k\right)^{\frac{1}{n}} (D_3 - D_1)^{\frac{1-n}{n}} D_i$$

Para mostrar la unicidad del problema de creep secundario de materiales que verifican la ley constitutiva anterior procedemos de la siguiente manera:

Admitamos la existencia de dos soluciones diferentes v^1, D^1, T^1 y v^2, D^2, T^2 del problema de valor de contorno de creep secundario.

Mostraremos previamente que:

$$\int_{\Omega} (T^2 - T^1) \cdot (D^2 - D^1) \, d\Omega = 0$$

Para ello tenemos en cuenta que: $D^i = (\nabla v^i)^S$ y que $\text{div}[(T^2 - T^1)^T (v^2 - v^1)] = \text{div} (T^2 - T^1) \cdot (v^2 - v^1) + (T^2 - T^1) \cdot \nabla (v^2 - v^1)$ de la integral anterior y del teorema de la divergencia se sigue:

$$\int_{\Omega} (T^2 - T^1) \cdot (D^2 - D^1) \, d\Omega = \int_{\Omega} (T^2 - T^1) \cdot \nabla (v^2 - v^1) \, d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \operatorname{div} [(T^2 - T^1)^T (v^2 - v^1)] d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} (T^2 - T^1) \cdot (v^2 - v^1) d\Omega = \\
&= \int_{\Gamma} (T^2 - T^1) n \cdot (v^2 - v^1) d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div} (T^2 - T^1) \cdot (v^2 - v^1) d\Omega
\end{aligned}$$

Dado que la primera integral del último miembro es nula pues $(T^2 - T^1)n = 0$ en Γ_T y $(v^2 - v^1) = 0$ en Γ_v y la segunda integral también resulta nula pues $\operatorname{div} (T^2 - T^1) = 0$ en Ω se arriba al resultado que queríamos probar.

A seguir determinaremos el valor de:

$$\int_{\Omega} (T^2 - T^1) \cdot (D^2 - D^1) d\Omega$$

teniendo en cuenta que T^i y D^i están relacionados mediante la ley de von MISES-TRESCA, y recordando que $\operatorname{tr} D^i = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (T^2 - T^1) \cdot (D^2 - D^1) d\Omega &= \int_{\Omega} (S^2 - S^1) \cdot (D^2 - D^1) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{3}{2} k\right)^{-\frac{1}{n}} (D_3 - D_1)^{\frac{1-n}{n}} (D^2 - D^1) \cdot (D^2 - D^1) d\Omega \geq 0
\end{aligned}$$

$e = 0$ sí y sólo sí $D^2 = D^1$ en todo punto $X \in \Omega$.

Lo anterior nos permite concluir que existe también una única solución v, D, S del problema de valor de contorno de creep en el caso de la ley no asociativa de von MISES-TRESCA.

CAPITULO III

VISCOPLASTICIDAD

En el análisis fenomenológico de los sólidos deformables es usual que las propiedades plásticas y viscosas de los materiales sean estudiadas por separado.

A efectos de simplificar el análisis y obtener una mejor comprensión de los fenómenos que se presentan asociados a determinada propiedad, se formula un modelo ideal de material donde está solamente presente la propiedad que se quiere estudiar.

Si bien cualquiera de los materiales ideales no representa el comportamiento de ningún material real, en condiciones particulares de sollicitación el comportamiento real puede ser aproximado mediante modelos ideales.

En la medida que surgen nuevos materiales y que se complican los tipos de sollicitación a que están expuestos en su vida útil, es necesario formular nuevos modelos mecánicos que consigan aproximar mejor el comportamiento real.

Así fue que, tratando de llevar en cuenta propiedades plásticas y viscosas en un mismo material, surgió el modelo denominado viscoplástico. Dicho modelo postula la existencia de una región convexa en el espacio de tensiones donde el material se comporta rígidamente y fuera de ella tanto propiedades plásticas como viscosas son llevadas en cuenta.

Los primeros en analizar el comportamiento de materiales viscoplásticos fueron SHVEDOR(1900) y BINGHAM(1922).

Sin embargo, fueron tan difundidos los trabajos de Bingham, con la publicación de su libro "Fluidity and Plasticity" que a los materiales que verifican las hipótesis constitutivas formuladas por él, se les denomina hasta ahora materiales ti
po Bingham.

Cuando Bingham introdujo la ley constitutiva que re
laciona tensión con velocidad de deformación lo hizo para el caso particular de corte puro, por lo que dicha ley resulta u
na relación entre escalares.

En 1932 HOHENEMSER y PRAGER ^{36, 37} generalizaron la ley constitutiva formulada por Bingham para estados de tensiones arbitrarios. La relación tensorial entre tensión y veloci
dad de deformación postulada por ellos, en el caso particular de corte puro, coincide con la de Bingham.

En 1951, analizando el problema de propagación de on
das en barras de material viscoplástico, MALVERN ^{38, 39} postula leyes constitutivas no lineales para casos uniaxiales de ten
sión.

Posteriormente en 1962 PERZYNA ⁴⁰ re
vee las ecuaciones constitutivas postuladas por Hohenemser y Prager e introduce mo
dificaciones con las que consigue mejores aproximaciones de los resultados experimentales.

En estados uniaxiales de tensión las expresiones pro
puestas por Perzyna coinciden con las utilizadas por Malvern.

En este capítulo se presenta un histórico sobre la evolución de los diferentes modelos viscoplásticos, mostrando las leyes constitutivas correspondientes, sus inversas y las respectivas propiedades.

Se pone en evidencia también, que los modelos de plas
ticidad ideal y creep secundario pueden ser obtenidos a partir

de modelos viscoplásticos.

Posteriormente se obtiene una ley general viscoplástica para el caso de materiales isotrópicos y se muestra la restricción que la condición de incompresibilidad introduce en dicha ley.

Se formula el problema de valor de contorno en viscoplasticidad estacionaria y finalmente se analiza el ejemplo de una esfera hueca con presión interna en que es posible obtener solución exacta.

III.1. Material tipo BINGHAM.

La ley constitutiva de los materiales que posteriormente serán designados como materiales tipo BINGHAM, fue formulada para estados de tensión y velocidad de deformación de corte puro.

Por definición se dice que un tensor T simétrico representa un estado de corte puro, si existen tres direcciones ortogonales e_k ($e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$) tales que las siguientes igualdades se verifiquen: $T e_1 \cdot e_1 = 0$, $T e_2 \cdot e_2 = 0$, $T e_3 \cdot e_3 = 0$.

Referido a la base e_k dicho tensor tiene solamente no nulas las componentes $T_{12} = T_{21}$.

Teniendo en cuenta lo anterior y dado que la ley de Bingham fue postulada para el caso de corte puro, se concluye que dicha ley es una relación entre dos escalares T_{12} , y D_{12} . A T_{12} se le denomina tensión cortante o de cisallamiento.

III.1.1. Ley Constitutiva de los materiales tipo BINGHAM.

La designación de materiales tipo BINGHAM es dada a aquellos materiales que sometidos a un estado de tensión de corte puro, reaccionan en forma rígida hasta que dicha tensión no supera determinado valor χ , ($\chi \in \mathbb{R}^+$) conocido como tensión constante de fluencia, es decir:

$$\text{Si } |T_{12}| \leq \chi \text{ se tiene } D_{12} = 0$$

donde $|\cdot|$ representa valor absoluto.

Cuando $|T_{12}|$ supera el valor de χ , se obtienen en correspondencia velocidades de deformación D_{12} no nulas de igual signo que T_{12} y proporcionales a la diferencia $|T_{12}| - \chi$:

$$\text{Si } |T_{12}| > \chi \text{ se tiene } D_{12} = \frac{1}{2\mu} \left[|T_{12}| - \chi \right] \frac{T_{12}}{|T_{12}|}$$

A la constante de proporcionalidad μ ($\mu \in \mathbb{R}^+$) se le denomina coeficiente de viscosidad.

Introduciendo la función $f = |T_{12}| - \chi$ conocida como función de fluencia, la ley de BINGHAM puede expresarse en la siguiente forma:

$$2\mu D_{12} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \frac{T_{12}}{|T_{12}|} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

El valor de la función de fluencia determina el comportamiento del material, $f \leq 0$ rígido, $f > 0$ viscoplástico.

Nótese que la ley de BINGHAM está bien definida en todo R puesto que a cada valor $T_{12} \in R$ le corresponde un único D_{12} . Obsérvese además, figura III.1, que la función $D_{12} = D_{12}(T_{12})$ es impar puesto que verifica que $-D_{12}(-T_{12}) = D_{12}(T_{12})$.

Recordando la definición de función signo, figura III.2 $\text{Sig } T_{12} = \frac{T_{12}}{|T_{12}|}$, la ley constitutiva anterior puede ser reescrita como:

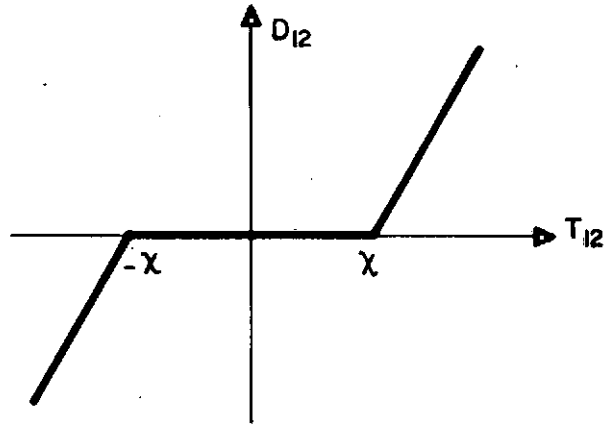


fig.III.1

$$2\mu D_{12} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f \text{ Sig } T_{12} & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

Obsérvese que si bien la función signo no está definida en el origen $T_{12} = 0$, en nuestro caso dicho punto está excluído, pues de la condición $f > 0$ se sigue que $|T_{12}| > \chi$, ($\chi \in R^+$).

Teniendo en cuenta que T_{12} es la tensión cortante o cisallante en un elemento diferencial de lados paralelos a las direcciones principales e_1, e_2 y que D_{12} es la velocidad de deformación del ángulo de distorción θ , el comportamiento mecánico del material de BINGHAM

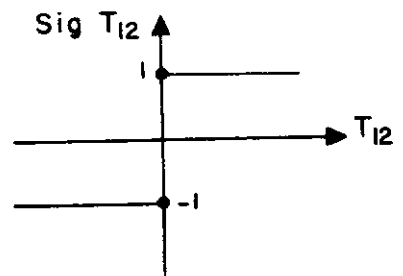


fig. III.2

puede resumirse como indica la figura III.3.

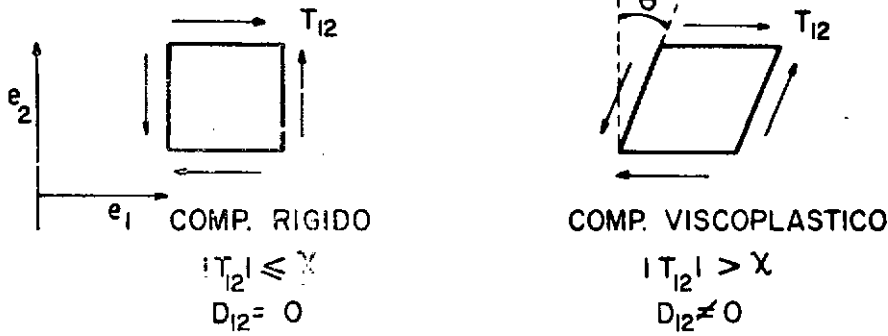


fig. III.3

Si bien la ley propuesta por BINGHAM, pasó algunos años sin que los investigadores le prestaran mucha atención, puede decirse que con ella nació la teoría de la viscoplasticidad.

III.1.2. Inversión de la ley de BINGHAM.

La inversa de la ley de BINGHAM nos permitirá poner en evidencia algunas propiedades del comportamiento viscoplastico y así como también mostrar su analogía con un modelo mecánico simple, compuesto de un elemento friccionante y un amortiguador.

En el análisis de la inversibilidad de la ley de BINGHAM, excluirémos del dominio de $D_{12}(\cdot)$ los puntos T_{12} pertenecientes al núcleo N de la transformación: $T_{12} \in N$, donde $N = \{T_{12} \in R; f(T_{12}) \leq 0\}$.

Consideremos por tanto la transformación $D_{12}(\cdot): D \rightarrow R$ donde $D = \{T_{12} \in R; f(T_{12}) > 0\}$ y $R = \{D_{12} \in R; D_{12} = \frac{1}{2\mu} f \text{ Sig } T_{12}, T_{12} \in D\}$ son los respectivos dominio y contradominio de $D = \frac{1}{2\mu} f \text{ Sig } T_{12}$.

Dada la manera en que fue definido el contradominio R , la transformación $D_{12}(\cdot)$ es sobre. Teniendo en cuenta además que la inyectividad también se verifica se concluye que la inversa de la ley de BINGHAM existe y es única. $T_{12}(\cdot) : R \rightarrow D$

Probada la existencia, a la expresión de la inversa $T_{12}(\cdot)$ se arriba recordando las dos igualdades siguientes:

$$2\mu D_{12} = f \operatorname{Sig} T_{12} = T_{12} - \chi \operatorname{Sig} T_{12}$$

$$\operatorname{Sig} D_{12} = \operatorname{Sig} T_{12}$$

De ellas se sigue que $T_{12}(\cdot)$ está dado por:

$$T_{12} = 2\mu D_{12} + \chi \operatorname{Sig} D_{12}$$

Obsérvese que la función $T_{12}(\cdot)$ está definida en todo el dominio R , exceptuando el origen $D_{12} = 0$, punto donde la función Sig no está definida. Figura III.4.

Obsérvese además que la función inversa es impar o sea verifica que $-T_{12}(-D_{12}) = T_{12}(D_{12})$.

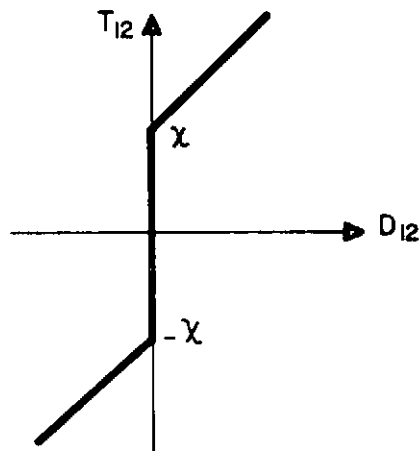


fig. III.4

III.1.3. Modelo Mecánico Equivalente.

De la inversa de la ley constitutiva formulada por BIN GHAM: $T_{12} = 2\mu D_{12} + \chi \text{Sig } D_{12} (D_{12} \neq 0)$, se sigue que la tensión T_{12} es la suma de una parte constante de valor χ , más una parte proporcional a D_{12} .

Por tanto dicha ley puede ser representada por un modelo mecánico equivalente constituido por un elemento friccionante y un amortiguador colocados en paralelo. Figura III.5.

Si la tensión T_{12} es menor o igual a χ , ($f \leq 0$) el modelo mecánico se comporta rigidamente, no siendo posible determinar T_{12} a partir de D_{12} .

El movimiento del modelo sólo es posible cuando T_{12} supera la resistencia de fricción χ cosa que sucede cuando $f > 0$.

En este caso T_{12} es la suma de una tensión de fricción χ , que se mantiene constante durante el movimiento, más una tensión viscosa $2\mu D_{12}$. Siendo posible si $D_{12} \neq 0$ determinar T_{12} a partir de D_{12} mediante la expresión:

$$T_{12} = 2\mu D_{12} + \chi \text{Sig } D_{12}$$

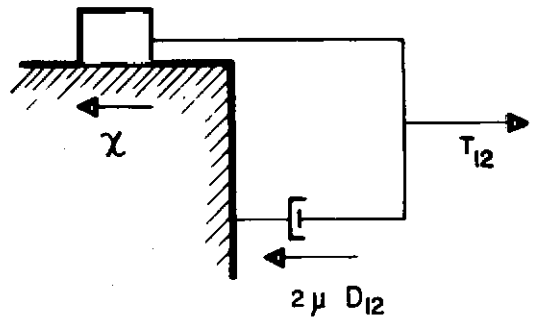


fig. III.5

III.2. Ley Constitutiva de HOHENEMSER y PRAGER.

Diez años después de la publicación del libro de BIN GHAM "Fluidity and Plasticity", HOHENEMSER y PRAGER generaliza

ron la ley constitutiva propuesta por él para estados de ten
sión arbitrarios.

La ley constitutiva introducida por HOHENEMSER- PRAGER
está dada por la siguiente expresión tensorial:

$$2\mu D = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f(S) J_2^{-1/2} S & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

donde

μ coeficiente de viscosidad ($\mu \in \mathbb{R}^+$)

D tensor velocidad de deformación, $D = (\nabla v)^S$

v velocidad

S tensor desviador de tensiones,

$$S = T - \frac{1}{3} (\text{tr } T) I$$

$f(S)$ función de fluencia, $f(S) = J_2^{1/2} - \chi$
 χ tensión cortante de fluencia 2 ($\chi \in \mathbb{R}^+$)
 J_2 segundo invariante del tensor desviador S .

$$J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S$$

La velocidad de deformación en un material que verifi-
ca la ley constitutiva anterior depende del estado tensional en
que se encuentra. En efecto, dado T en un punto X , es posible
a través de la ley constitutiva determinar el correspondiente D .

$$T \xrightarrow{\quad} S \xrightarrow{\quad} f(S) \xrightarrow{\quad} D$$

$S = \left[II - \frac{1}{3} I \otimes I \right] T$
 $f(S) = J_2^{1/2} - \chi$
 Ley const.

Si $f(S) \leq 0$ de la ley constitutiva, se sigue que $D = 0$, lo que representa un comportamiento rígido del material. En caso contrario si $f(S) > 0$ se tiene en correspondencia una velocidad de deformación finita dada por $2\mu D = f(S) J_2^{-1/2} S$.

Teniendo en cuenta que D y S pertenecen al campo de tensores simétricos con trazo nulo $\{S \in \text{Sym}: \text{tr } S = 0\}$, en componentes, la relación constitutiva anterior se transforma en cinco relaciones escalares.

III.2.1. Propiedades de la Ley Constitutiva.

A continuación se pondrán en evidencia algunas propiedades de la ley constitutiva de HOHENEMSER-PRAGER.

- i) Dos estados de tensión que difieren en una presión hidrostática producen igual velocidad de deformación.

Sean T_1 y T_2 dos estados de tensión que difieren en una presión hidrostática $T_2 - T_1 = pI$. Sus correspondientes tensores desviadores S_1 y S_2 resultan iguales, por tanto de la ley constitutiva se concluye que $D = D(S_1) = D(S_2)$.

- ii) Dos estados de tensión desviadora diferentes que hagan negativa o nula a la función de fluencia les corresponde velocidad de deformación nula.

Si dos estados de tensión desviadora, $S_1 \neq S_2$ son tales, que $f(S_i) \leq 0$ de la ley constitutiva se sigue que $D(S_1) = D(S_2) = 0$.

- iii) La velocidad de deformación obtenida mediante la ley $2\mu D = f(S) J_2^{-1/2} S$, corresponde a un campo de velocidades isocóricas.

Aplicando la operación trazo se tiene que $\text{tr } D = 0$, que equivale a la condición de isocoridad $\text{div } v = 0$.

- iv) Las raíces cuadradas de los segundos invariantes de S y D , que designaremos con $J_2^{1/2}$ y $L_2^{1/2}$ verifican una relación similar a la formulada por BINGHAM para T_{12} y D_{12} .

En efecto, multiplicando escalarmente la relación constitutiva por sí misma, dividiendo por dos y extrayendo la raíz cuadrada se obtiene que:

$$2\mu L_2^{1/2} = J_2^{1/2} - \chi$$

- v) En el caso particular de corte puro la ley constitutiva se reduce a la propuesta por BINGHAM.

$$\text{Si } [T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta: $S = T$, $[S_{ij}] = [T_{ij}]$, $J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S = T_{12}^2$

$$f = J_2^{1/2} - \chi = |T_{12}| - \chi$$

Introduciendo los valores anteriores en la ley constitutiva se tiene: $2\mu D_{12} = (|T_{12}| - \chi) \frac{T_{12}}{|T_{12}|}$ que no es otra cosa que la ley de BINGHAM. Figura III.6.

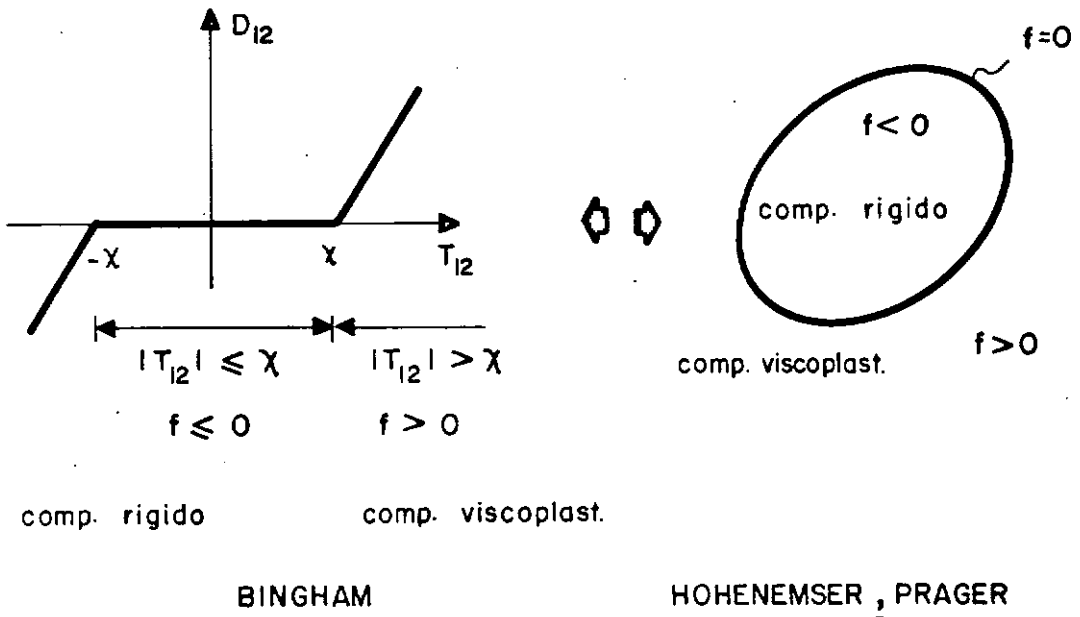


fig. III.6

- vi) La ley viscosa lineal de MAXWELL $2\mu D = S$ es posible de ser obtenida a partir de la ley viscoplástica haciendo $\chi \rightarrow 0$.

El límite de la función de fluencia para $\chi \rightarrow 0$ resulta $\lim (J_2^{1/2} - \chi) = J_2^{1/2}$, por lo tanto la superficie de fluencia $f(S) = 0$ se reduce al punto $S = 0$ y la expresión de la ley constitutiva viscoplástica $2\mu D = f(S) J_2^{-1/2} S$ a $2\mu D = S$, Figura III.7.

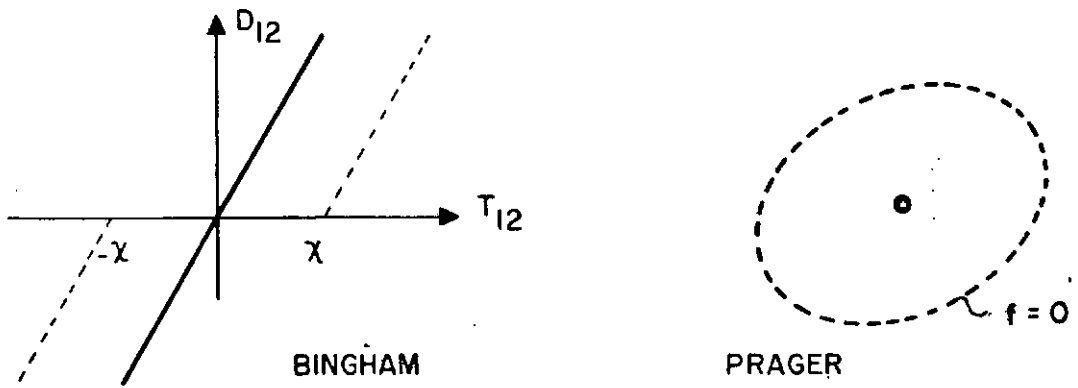


fig. III.7

- vii) La ley constitutiva de HOHENEMSER - PRAGER puede ser expresada en función de la función de fluencia f y de la derivada de dicha función con respecto a T , mediante la expresión $D = \frac{1}{\mu} f(S) f_T$

Teniendo en cuenta que la derivada de la función de fluencia $f = J_2^{-1/2} - \chi$, con respecto a T está dada por:

$$f_T = \frac{df}{dT} = \frac{df}{dJ_2} \frac{dJ_2}{dT} = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S$$

Se sigue que si $f(S) > 0$, la ley constitutiva $D = \frac{1}{2\mu} f(S) J_2^{-1/2} S$ puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$D = \frac{1}{\mu} f(S) f_T$$

- viii) Existe una función escalar de variable tensorial $\phi = \phi(S)$ conocida como potencial viscoplástico a partir de la cual la ley cons

titutiva puede ser derivada:

$$D = \dot{\Phi}_T = \frac{d\Phi}{dT}$$

Del resultado arribado en el ítem anterior se sigue que en este caso, dicha función Φ está dada por:

$$\Phi(S) = \frac{1}{2\mu} f(S)^2 = \frac{1}{2\mu} (J_2^{1/2} - \chi)^2$$

III.2.2. Inversión de la Ley Constitutiva.

La inversa de la ley viscoplástica de HOHENEMSER- PRAGER, proporciona información adicional sobre las propiedades de dicha ley. Entre ellas por ejemplo, permite poner en evidencia que si un estado de tensiones desviadoras S es tal que $f(S) > 0$, dicha tensión S puede ser descompuesta en la suma de una tensión desviadora plástica más una viscosa.

En forma similar a la ley de BINGHAM que tiene inversa en el dominio $\{T_{12} \in R ; f(T_{12}) > 0\}$, analizaremos la inversa de la ley de HOHENEMSER-PRAGER en el dominio D , dado por:

$$D = \{S \in \text{Sym} ; \text{tr } S = 0 , \quad f(S) > 0\}$$

A través de la ley constitutiva:

$$D = D(S) = \frac{1}{2\mu} f(S) J_2^{-1/2} S = \frac{1}{2\mu} (J_2^{1/2} - \chi) J_2^{-1/2} S$$

formemos el siguiente conjunto R :

$$R = \{D \in \text{Sym} ; D = D(S) , S \in D\}$$

De la manera en que fue definido R la transformación $D(.) : D \rightarrow R$ es sobre. Mostraremos a seguir que ella es además inyectiva, lo que nos asegurará la existencia de inversa.

Tal propiedad será probada por el absurdo. Admitiremos que la inyectividad de $D(S)$ no se verifica o sea que hay valores $D = D(S)$ que provienen de valores de S diferentes. Por lo tanto $D = D(S_1) = D(S_2)$ para $S_2 \neq S_1$.

Explicitando la ley constitutiva para ambos valores de S se tiene:

$$2\mu D = f(S_1) J_2^{-1/2} (S_1) S_1 = f(S_2) J_2^{-1/2} (S_2) S_2$$

De la igualdad anterior se sigue que $S_2 = \alpha S_1$ donde:

$$\alpha = \frac{f(S_1)}{f(S_2)} \frac{J_2^{1/2}(S_2)}{J_2^{1/2}(S_1)} \neq 1$$

Introduciendo $S_2 = \alpha S_1$ en la relación $D = D(S_1) = D(S_2)$ se arriba a que: $f(S_1) = f(S_2)$ o sea $\alpha J_2^{1/2}(S_1) = J_2^{1/2}(S_1)$.

Dicho resultado contradice la hipótesis inicial asumida de que $S_2 = \alpha S_1$ y $\alpha \neq 1$.

De lo anterior concluimos que la transformación $D(.) : D \rightarrow R$ además de sobre es inyectiva, lo que nos permite asegurar

la existencia de una única inversa $S = S(D)$ tal que $S(.): R \rightarrow D$

Previamente a determinar la inversa de $D(S)$ observamos que si $D(S)$ es inyectiva, existe una función $g(D)$ definida en el contradominio R que cierra el ciclo indicado en la figura III.8.

La función $g(D)$ permite expresar la inversa $S = S(D)$ en la siguiente forma; figura III.9

$$S(D) = \frac{2\mu}{g(D)} D$$

donde $g(.): R \rightarrow R$ está definida mediante la relación:

$$g(D) = J_2^{-1/2} f(S) = h(S)$$

De lo anterior se sigue que para obtener la inversa $S(D)$ es necesario en primer término determinar la función $g(D)$.

Para determinar $g=g(D)$ partimos de la siguiente relación, ver figura III.9

$$h(S) = h\left[\frac{2\mu D}{g(D)}\right] = g(D)$$

Particularizando la igualdad anterior para la función: $h(S) = J_2^{-1/2} (J_2^{1/2} - \chi) = 1 - J_2^{-1/2} \chi$, se tiene

$$1 - \frac{\chi g(D)}{2\mu L_2^{1/2}} = g(D)$$

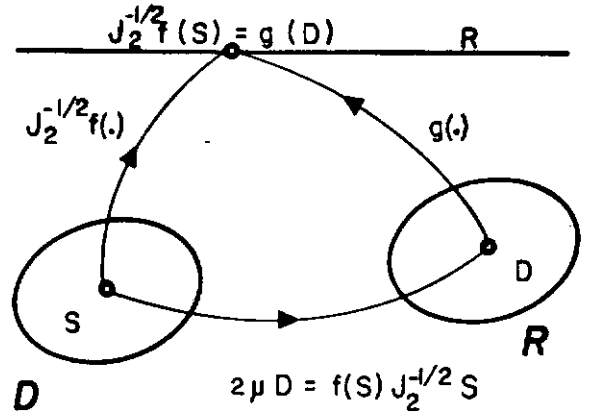


fig. III.8

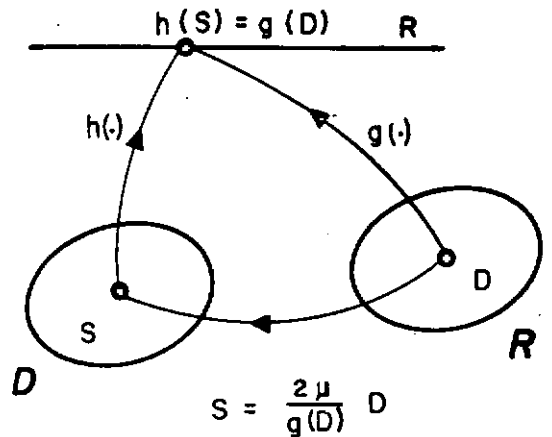


fig. III.9

De la cual se deduce que $g(D)$ está dada por:

$$g(D) = \frac{2\mu L_2^{1/2}}{\chi + 2\mu L_2^{1/2}} \quad \text{donde } L_2 = \frac{1}{2} D.D$$

Obtenida $g(D)$, la inversa de la ley constitutiva de HO
HENEMSER y PRAGER resulta:

$$S = \frac{2\mu}{g(D)} D = \frac{\chi + 2\mu L_2^{1/2}}{L_2^{1/2}} D$$

Obsérvese que dado un campo de velocidades v tal que verifique que $\text{div } v = 0$, $(\nabla v)^S \neq 0$, es posible determinar a partir de la ley anterior la tensión desviadora S correspondiente:

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\quad} & D & \xrightarrow{\quad} & S \\ D = (\nabla v)^S & & \text{Ley const. inversa} & & \end{array}$$

III.2.3. Propiedades de la Ley Constitutiva Inversa.

La ley constitutiva inversa permite poner en evidencia que las siguientes propiedades se verifican:

- i) La tensión desviadora S es la suma de una tensión plástica más una tensión viscosa

De la ley inversa se sigue que:

$$S = S^P + S^V = (\chi L_2^{-1/2} + 2\mu) D$$

El sumando $S^P = \chi L_2^{-1/2} D$ es independiente de una variación isotrópica de D y tiene la forma de una tensión plástica.

El sumando $S^V = 2\mu D$ depende de cualquier variación de D y tiene la forma de una tensión viscosa.

- ii) Introduciendo la función $\ell(D) = \frac{\chi}{2\mu} + L_2^{1/2}$ la ley constitutiva inversa puede expresarse en función de $\ell(D)$ y de su derivada ℓ_D mediante la expresión $S = 2\mu \ell(D) \ell_D$

Teniendo en cuenta que la derivada $\ell(D)$ con respecto a D está dada por:

$$\ell_D = \frac{d\ell}{dL_2} \frac{dL_2}{dD} = \frac{1}{2} L_2^{-1/2} D$$

de la relación inversa se sigue que:

$$S = (\chi L_2^{-1/2} + 2\mu) D = 4\mu \ell(D) \ell_D$$

- iii) Existe una función potencial $\Psi = \Psi(D)$ a partir de la cual la relación constitutiva inversa, puede ser derivada $S = \Psi_D = \frac{d\Psi}{dD}$

De la igualdad a que se arribó en el ítem anterior se sigue que $\Psi(D)$ está dada por:

$$\Psi(D) = 2\mu \ell^2(d) = 2\mu \left(\frac{\chi}{2\mu} + L^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

III.2.4. Determinación de las Constantes χ y μ .

La determinación de las constantes χ y μ de cada material es realizada en base a los resultados obtenidos en ensayos mecánicos para estados simples de tensión.

En dichos ensayos se prescribe la velocidad de deformación y se mide la correspondiente tensión, haciéndose por tanto necesario trabajar con la inversa de la ley constitutiva particularizada para cada caso.

Los ensayos empleados más frecuentemente son de corte puro realizados generalmente en cilindros de pared delgada sometidos a torsión y de tracción simple.

a) corte puro

Para un estado de tensiones de corte puro $[T_{ij}]$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

se tiene que el correspondiente desviador $[S_{ij}]$ coincide con $[T_{ij}]$

$$[S_{ij}] = [T_{ij} - \frac{1}{3} (T_{kk}) \delta_{ij}] = [T_{ij}]$$

De la ley constitutiva se sigue que la velocidad de de formación corresponde también a un estado de corte puro:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & 0 \\ D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resultando por tanto $L_2^{1/2} = |D_{12}|$.

Particularizando la ley constitutiva inversa

$S_{ij} = (\frac{\chi}{L_2^{1/2}} + 2\mu) D_{ij}$ para este caso se tiene:

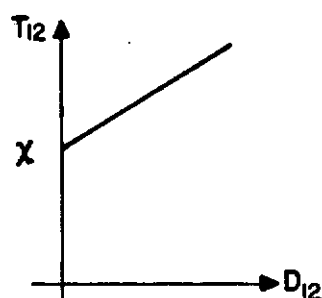
$$T_{12} = (\frac{\chi}{|D_{12}|} + 2\mu) D_{12} = \chi \text{Sig } D_{12} + 2\mu D_{12}$$

Admitiendo $D_{12} > 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$T_{12} = \chi + 2\mu D_{12}$$

La ley constitutiva permite aproximar los resultados de los ensayos mediante una recta.

El valor de χ es obtenido como límite de T_{12} cuando D_{12} tiende a 0.



$$\chi = \lim_{D_{12} \rightarrow 0} T_{12}$$

fig. III.10

b) tracción simple.

Para un estado de tensión uniaxial:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta el siguiente estado de tensión desviadora:

$$[S_{ij}] = [T_{ij} - \frac{1}{3} (T_{11}) \delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} T_{11} \end{bmatrix}$$

De la ley constitutiva y de la condición de que $\text{tr } D = D_{kk} = 0$, se sigue que la velocidad de deformación correspondiente está dada por:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} D_{11} \end{bmatrix}$$

En este caso particular $L_2^{1/2} = \left[\frac{D \cdot D}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} |D_{11}|$

Introduciendo los valores anteriores en la ley constitutiva inversa se arriba a la siguiente expresión:

$$T_{11} = \left(\frac{\sqrt{3} \chi}{|D_{11}|} + 3\mu \right) D_{11} = \sqrt{3} \chi \text{Sig } D_{11} + 3\mu D_{11}$$

Si $D_{11} > 0$ se tiene $T_{11} = \sqrt{3} \chi + 3\mu D_{11}$

La relación anterior permite aproximar los resultados de los ensayos mediante una recta como indica la figura. El valor $\sqrt{3} \chi = T_{11}^Y$, conocido como tensión de fluencia en tracción simple, es obtenido como límite de T_{11} cuando D_{11} tiende a 0.

$$T_{11}^Y = \lim_{D_{11} \rightarrow 0} T_{11}$$

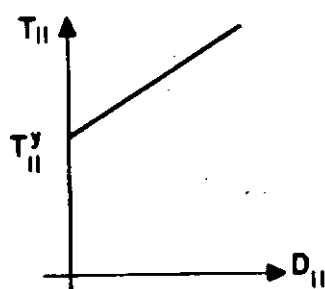


fig. III.11

III.3. Ley Constitutiva de PERZYNA.

Más recientemente, en 1962, PERZYNA⁴⁰ analiza la relación constitutiva propuesta por PRAGER y muestra que ella puede ser expresada mediante la función de fluencia de von MISES y de su derivada f_T ;

$$\mu D = \langle f \rangle f_T$$

donde: $f = J_2^{1/2} - \chi$, $f_T = \frac{df}{dJ_2} \frac{dJ_2}{dT} = \frac{S}{2 J_2^{1/2}}$ y $\langle f \rangle$ representa la función definida de la manera siguiente, figura III.12.

$$\langle f \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ f & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

Introduciendo una nueva constante γ , que tiene la di

mensión de una velocidad y es
 tá dada por la relación $\gamma = \chi / \mu$,
 la expresión anterior puede ser
 reescrita en la siguiente forma:

$$D = \gamma \langle f^* \rangle f_T$$

donde f^* es la función f adimen-
 sionalizada,

$$f^* = \frac{f}{\chi} = \frac{J^{1/2}}{\chi} - 1$$

A efectos de obtener mejor aproximación de los resulta-
 dos experimentales PERZYNA propone reemplazar f^* por una fun-
 ción escalar $\phi = \phi(f^*)$; postulando por tanto la siguiente ley
 constitutiva:

$$D = \gamma \langle \phi(f^*) \rangle f_T$$

donde:

$$\langle \phi(f^*) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ \phi(f^*) & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

Impondremos las siguientes restricciones a la función
 ϕ . Exigiremos que esté definida en $f^* \geq 0$, sea monótona cre-
 ciente y que se anule en el origen, figura III.13.

Tenemos por tanto en la ley constitutiva anterior dos
 funciones a determinar ϕ y f . Generalmente se procede de la si-

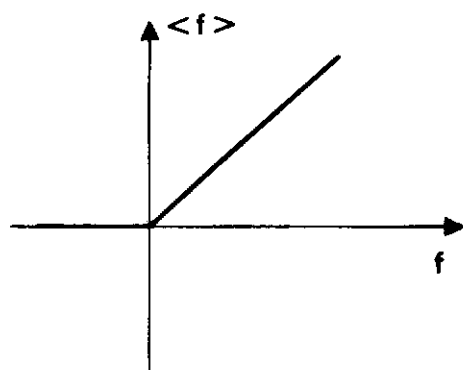


fig. III.12

guiente forma: se adopta una función de fluencia f y posteriormente en base a resultados experimentales se selecciona ϕ .

PERZYNA adopta $f = J^{1/2} - \chi$ con lo que la ley constitutiva resulta $D = \frac{\gamma}{2} \langle \phi(f^*) \rangle J_2^{-1/2} S$. Y para $\phi(f^*)$ sugiere las siguientes funciones: f^* , f^{*n} , e^{f^*-1} , $\sum \alpha_n f^{*n}$.

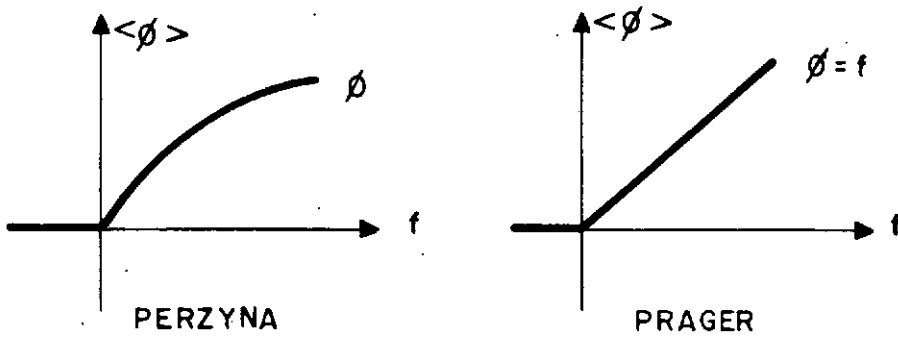


fig. III.13

III.3.1 Inversa de la Ley de PERZYNA.

Introduzcamos el conjunto D del espacio de tensiones desviadoras dado por:

$$D = \{S \in \text{Sym} : \text{tr } S = 0, \quad f(S) > 0\}$$

y definamos un conjunto R del espacio de velocidades de deformación, a través de la ley constitutiva propuesta por PERZYNA:

$$R = \{D \in \text{Sym} : D = \frac{\gamma}{2} \phi(f^*) J_2^{-1/2} S, \quad S \in D\}$$

Mostraremos que la función $D(.): D \rightarrow R$ es inyectiva, cosa de poder asegurar la existencia de inversa.

Probaremos lo anterior por el absurdo, admitiendo que un mismo valor de D proviene de dos S diferentes $S_1 \neq S_2$.

De la ley constitutiva y de haber admitido que S_1 y S_2 conducen al mismo valor de D , se sigue que:

$$D = \gamma \frac{\phi[f^*(S_1)]}{2J_2^{1/2}(S_1)} S_1 = \gamma \frac{\phi[f^*(S_2)]}{2J_2^{1/2}(S_2)} S_2$$

resultando por tanto: $S_2 = \alpha S_1$

donde

$$\alpha = \frac{\phi[f^*(S_1)]}{\phi[f^*(S_2)]} \frac{J_2^{1/2}(S_2)}{J_2^{1/2}(S_1)} \neq 1$$

Introduciendo $S_2 = \alpha S_1$ en la ley constitutiva se obtiene la siguiente igualdad:

$$\phi[f^*(S_1)] = \phi[f^*(\alpha S_1)]$$

$$\text{donde } f^*(S_1) = \frac{J_2^{1/2}(S_1)}{\chi} - 1, \quad f^*(\alpha S_1) = \frac{\alpha J_2^{1/2}(S_1)}{\chi} - 1$$

Recordando que $\alpha \neq 1$, se tiene que $f^*(S_1) \neq f^*(\alpha S_1)$. Arribándose por tanto a una igualdad en ϕ para argumentos diferentes, lo que es una contradicción puesto que la función ϕ por

hipótesis es monótona.

Probada la inyectividad de $D(\cdot)$ podemos afirmar que existe una función $g(D)$ definida en el conjunto R que cierra el ciclo indicado en la figura III.14 y que verifica la relación:

$$g(D) = h(S) = \frac{\phi[f^*(S)]}{2 J_2^{1/2}}$$

Dicha función nos permite expresar la inversa $S = S(D)$ en la siguiente forma:

$$S(D) = \frac{D}{\gamma g(D)}$$

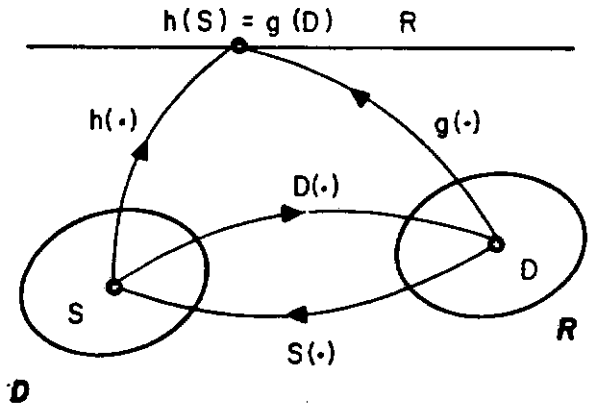


fig. III.14

Por lo tanto para determinar la ley constitutiva inversa habrá que determinar previamente $g(D)$. Para ello partimos de la siguiente relación, ver figura III.14.

$$h(S) = h \left[\frac{D}{\gamma g(D)} \right] = g(D)$$

$$\text{donde } h(S) = \frac{1}{2J_2^{1/2}} \phi \left[\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right]$$

De ambas expresiones se sigue que:

$$\frac{\gamma g(D)}{2L_2^{1/2}} \phi \left[\frac{1}{\gamma g(D)} \frac{L_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right] = g(D)$$

Designando con ϕ^{-1} a la inversa de la función ϕ , de la relación anterior se deduce que $g(D)$ está dada por:

$$g(D) = \frac{L_2^{1/2}}{\gamma \chi \left[\phi^{-1} \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right) + 1 \right]}$$

Obtenida $g(D)$, la inversa de la ley constitutiva de PERZYNA resulta:

$$S = \frac{\chi \left[\phi^{-1} \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right) + 1 \right]}{L_2^{1/2}} D$$

Nótese que si descomponemos la ley de PERZYNA en dos sumandos:

$$S = \frac{\chi \phi^{-1} \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)}{L_2^{1/2}} D + \frac{\chi}{L_2^{1/2}} D$$

y recordamos la expresión a que arribamos para la inversa de la ley de HOHNEMSER-PRAGER:

$$S = 2\mu D + \frac{\chi}{L_2^{1/2}} D$$

se observa que la parte plástica $S^P = \frac{\chi}{L_2^{1/2}} D$ es la misma en

ambas expresiones.

En el caso de corte puro $T_{12} > \chi$ la ley de PERZYNA se reduce a la siguiente relación entre D_{12} y T_{12}

$$T_{12} = \chi \phi^{-1} \left(\frac{2D_{12}}{\gamma} \right) \text{Sig } D_{12} + \chi \text{ Sig } D_{12}$$

Dicha expresión puede ser representada por un modelo mecánico equivalente, constituido por un elemento friccionante y un amortiguador no lineal colocados en paralelo, figura III.15.

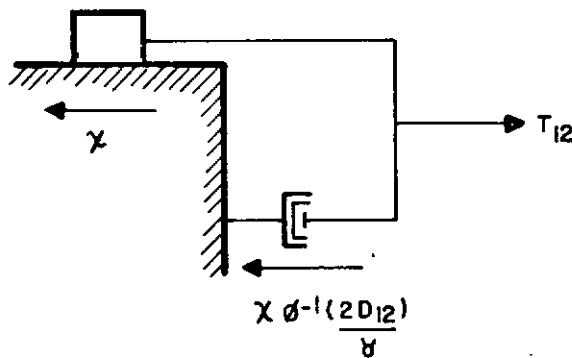


fig. III.15

Analizaremos a seguir dos ejemplos de funciones ϕ :

i) *Función potencial* $\phi(.) = (.)^n$

En este caso la inversa resulta $\phi^{-1}(.) = (.)^{1/n}$. Particularizando las expresiones generales de $g(D)$ y $S(D)$, se tiene:

$$g(D) = \frac{L_2^{1/2}}{\gamma \chi \left[\left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right]} ; \quad S = \frac{\chi \left[\left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right]}{L_2^{1/2}} D$$

Si $n = 1$ las expresiones anteriores coinciden con las obtenidas para la ley de HOHENEMSER-PRAGER.

ii) *Función exponencial* $\phi(.) = e^{(.)} - 1$

La inversa de ϕ está dada por $\phi^{-1}(.) = \ln[.(.) + 1]$, resultando:

$$g(D) = \frac{L_2^{1/2}}{\gamma \chi \left[\ln \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} + 1 \right) + 1 \right]}, \quad S = \frac{\chi \left[\ln \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} + 1 \right) + 1 \right]}{L_2^{1/2}} D$$

III.3.2 Determinación de las Constantes χ y γ y selección de la función ϕ^{-1} .

Particularizaremos a seguir las expresiones constitutivas de PERZYNA para un estado de tensión uniaxial $T_{11} > \sqrt{3} \chi = T_{11}^Y$

Previamente recordemos que en el caso de tensión uniaxial T , S y J_2 están dados por:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}T_{11} \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S.S = \frac{1}{3} T_{11}^2$$

y la velocidad de deformación D y su segundo invariante por:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}D_{11} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \frac{1}{2} D \cdot D = \frac{3}{4} D_{11}^2$$

Introduciendo los valores anteriores en las expresiones constitutivas de PERZYNA se tiene:

$$D = \gamma \phi \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right) \frac{S}{2J_2^{1/2}}$$

$$D_{11} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \phi \left(\frac{T_{11}}{T_{11}^Y} - 1 \right)$$

$$S = \frac{\chi \left[\phi^{-1} \left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right) + 1 \right]}{L_2^{1/2}} D$$

$$T_{11} = T_{11}^Y \left[\phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}D_{11}}{\gamma} \right) + 1 \right]$$

De las relaciones entre T_{11} y D_{11} a que arribamos se ve que velocidades de deformación $D_{11} \neq 0$ posibilitan estados de tensión superiores a la tensión de fluencia. $T_{11} > T_{11}^Y$

Si $D_{11} = 0$ se tiene $T_{11} = T_{11}^Y$ puesto que la función ϕ verifica que $\phi(0) = 0$.

Dado un material se determina experimentalmente para cada D_{11} el correspondiente valor T_{11} , obteniéndose resultados como indica la figura III.16

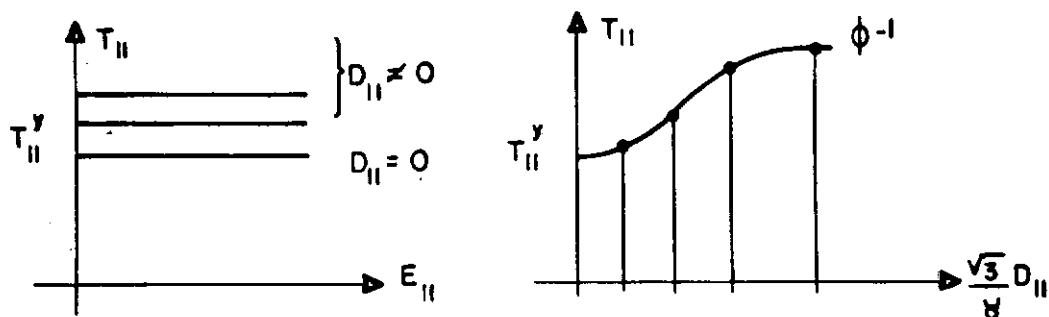


fig. III.16

Posteriormente se aproximan dichos resultados con funciones ϕ conocidas, tales como $\phi = f^*$, $\phi = f^{*n}$, $\phi = e^{f^*} - 1$ con las que se tienen las siguientes relaciones entre T_{11} y D_{11} para el caso uniaxial:

$$\phi = f^* = \frac{J^{1/2}}{\chi} - 1$$

$$T_{11} = T_{11}^Y \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{\chi} D_{11} \right]$$

$$\phi = f^{*n}$$

$$T_{11} = T_{11}^Y \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma} D_{11} \right)^{1/n} \right]$$

$$\phi = e^{f^*} - 1$$

$$T_{11} = T_{11}^Y \left[1 + \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{3} D_{11}}{\gamma} + 1 \right) \right]$$

También es posible emplear combinaciones lineales de las funciones anteriores tal como lo hace PERZYNA⁴¹ para aproximar resultados experimentales obtenidos por CLARCK y DUWEZ⁴² mediante la expresión $\phi(f^*) = \sum_{n=1}^5 \alpha_n f^{*n}$.

III.3.3 Leyes Viscopoplásticas Asociativas. Potenciales viscoplásticos.

Como ya fue observado en la ley propuesta por PERZYNA $D = \gamma < \phi(f) > f_T$, hay dos funciones escalares a ser determinadas, una de variable tensorial $f = f(T)$ denominada función de fluencia y otra de variable escalar $\phi = \phi(f)$ que denominaremos función viscoplástica.

Cuando la función viscoplástica $\phi(f)$ es integrable, a la

correspondiente ley constitutiva $D = \gamma < \phi > f_T$ se le denomina a sociativa, puesto que existe en este caso, un potencial $\Phi = \Phi(f)$ a partir del cual dicha ley puede ser derivada.

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$D = \dot{\Phi}_T = \frac{d\Phi}{df} \dot{f}_T$$

Comparando la relación anterior con la ley constitutiva, se sigue que: $\dot{\Phi}_f = \frac{d\Phi}{df} = \gamma < \phi(f) >$

Empleando una función viscoplástica del tipo $\phi(f) = \alpha f^n$ se obtiene la siguiente ley constitutiva y el correspondiente potencial:

$$D(f) = \gamma < \alpha f^n > \dot{f}_T, \quad \Phi(f) = \frac{\gamma \alpha}{n+1} < f^{n+1} >$$

En las expresiones anteriores ya fue escogida la función $\phi(f)$, resta aún definir la función de fluencia f .

Si se emplea la función de fluencia de von MISES o la función de fluencia de TRESCA se arriba a leyes viscoplásticas asociativas que designaremos como ley de PERZYNA-von MISES o ley de PERZYNA-TRESCA.

Dichas leyes tienen importancia porque a partir de ellas, como será puesto en evidencia más adelante es posible obtener los modelos de plasticidad ideal y creep secundario estudiados en los Capítulos I y II.

A seguir particularizaremos las expresiones constitutivas para las funciones de fluencia de von MISES y TRESCA.

i) *Ley viscoplástica asociativa de PERZYNA-von MISES.*

Introduciendo la función de fluencia de von MISES

$$f = J_2^{1/2} - \chi \text{ en:}$$

$$D = \gamma < \alpha f^n > f_T, \quad \Phi(f) = \frac{\gamma \alpha}{n+1} < f^{n+1} >$$

y haciendo $\alpha = \chi^{-n}$ se tiene:

$$D = \frac{\gamma}{2} < \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right)^n > J_2^{-1/2} S$$

$$\Phi = \frac{\gamma}{(n+1)\chi^n} < f^{n+1} > = \frac{\gamma}{(n+1)\chi^n} < (J_2^{1/2} - \chi)^{n+1} >$$

que son las expresiones de la ley viscoplástica asociativa de PERZYNA-von MISES y su correspondiente potencial.

La respectiva inversa de esta ley fue determinada en el párrafo III.3.1 y está dada por:

$$S = \frac{\chi \left[\left(\frac{2L^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right]}{L_2^{1/2}} D$$

ii) *Ley viscoplástica asociativa de PERZYNA-TRESCA.*

Introduciendo la función de fluencia de TRESCA

$$f = T_3 - T_1 - Y \text{ en la relación viscoplástica de PERZYNA:}$$

$$D = \gamma < \alpha f^n > f_T \text{ y en su correspondiente potencial: } \Phi(f) = \frac{\gamma \alpha}{n+1} < f^{n+1} >$$

Haciendo $\alpha = Y^{-n}$ resulta:

$$D_3 = -D_1 = \gamma \left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^n$$

$$\phi = \frac{\gamma}{(n+1)Y^n} \langle f^{n+1} \rangle = \frac{\gamma}{(n+1)Y^n} \langle (T_3 - T_1 - Y)^{n+1} \rangle$$

Las expresiones anteriores representan la relación constitutiva y el potencial de la ley viscoplástica asociativa de PERZYNA-TRESCA⁴³.

La inversibilidad de la ley de PERZYNA-TRESCA puede ser analizada en forma similar a la ley de BINGHAM, párrafo III.1.2, identificando D_3 con D_{12} y $T_3 - T_1$ con T_{12} .

Probada la existencia, a la expresión de la inversa se arriba despejando $T_3 - T_1$ de la relación $D_3 = \gamma \left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^n$, con lo que se obtiene:

$$T_3 - T_1 = Y \left[1 + \left(\frac{D_3}{\gamma} \right)^{1/n} \right] \quad (D_3 > 0)$$

III.3.4. Leyes Viscoplásticas no Asociativas.

La ley constitutiva de PERZYNA puede ser extendida al caso siguiente $D = \gamma \langle \phi(f) \rangle g_T$, donde $f = f(T)$ es la función de fluencia y $g = g(T)$ es una función potencial que en cada punto T nos da la dirección de la velocidad de deformación.

Dado un estado de tensiones T en un punto X , tal que $f(T) > 0$, es posible a través de la ley constitutiva determi -

minar el correspondiente D. fig.

III.17

$$T(f(T) > 0) \longrightarrow D$$

$$D = \gamma \phi(f) g_T$$

Cuando $\phi(f)$ y $g(T)$ son tales que no existe una función potencial a partir del cual la ley $D = D(S)$ pueda ser derivada decimos que la ley constitutiva es no asociativa.

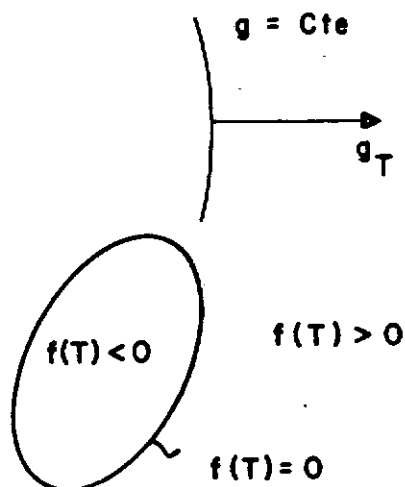


fig.III.17

Como ejemplo de ley no asociativa presentaremos la ley de PERZYNA-von MISES-TRESCA.

iii) *Ley viscoplástica no asociativa PERZYNA-von MISES-TRESCA.*

Para obtener la expresión constitutiva de dicha ley se parte de la expresión de PERZYNA generalizada:

$$D = \gamma \langle \phi(f) \rangle g_T$$

en la que se adopta: $\phi(f) = \alpha f^{n-1} = \alpha (T_3 - T_1 - Y)^{n-1}$ y $g(T) = J_2$

Introduciendo las expresiones anteriores en

$D = \gamma \langle \phi(f) \rangle g_T$ y haciendo $\alpha = Y^{-n+1}$ se tiene:

$$D = \gamma \left\langle \left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^{n-1} \right\rangle S$$

Teniendo en cuenta que $T_3 - T_1 = S_3 - S_1$, la ley viscoplástica no asociativa de PERZYNA-von MISES-TRESCA puede ser expresada en función de S y sus componentes:

$$D = \gamma \left(\left(\frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 \right)^{n-1} \right) S$$

A seguir analizaremos la inversibilidad de la ley de PERZYNA-von MISES-TRESCA para el caso particular de $n = 2$.

Para ello introducimos el dominio D dado por:

$$D = \{S \in \text{Sym} ; \text{tr } S = 0 , S_3 - S_1 > Y\}$$

y a través de la ley constitutiva $D = D(S) = \gamma \left(\left(\frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 \right) \right) S$.

definimos el siguiente conjunto R .

$$R = \{D \in \text{Sym} ; D = D(S) , S \in D\}$$

La transformación $D(.): D \rightarrow R$ es sobre e inyectiva.

La primera propiedad es inmediata y la segunda será probada por el absurdo, admitiendo que hay valores de D iguales que provienen de S diferentes, o sea $D = D(S) = D(S^*)$ para $S \neq S^*$.

Explicitando la ley constitutiva para ambos valores S y S^* se tiene:

$$D = \gamma \left(\left(\frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 \right) \right) S = \gamma \left(\left(\frac{S_3^* - S_1^*}{Y} - 1 \right) \right) S^*$$

De la igualdad anterior resulta que $S^* = \alpha S$ donde:

$$\alpha = \frac{S_3 - S_1 - Y}{S_3^* - S_1^* - Y} \neq 1$$

Introduciendo $S^* = \alpha S$ en la igualdad $D = D(S^*) = D(S)$ se arriba a que: $\alpha [\alpha (S_3 - S_1) - Y] - (S_3 - S_1 - Y) = 0$ cuyas raíces

son: $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -\frac{S_3 - S_1 - Y}{S_3 - S_1}$

Como nuestro dominio D está limitado a tensiones desviadoras S que verifican la condición $S_3 - S_1 - Y > 0$ de la raíz

α_2 se sigue que el tensor $S^* = \alpha_2 S = -\frac{S_3 - S_1 - Y}{S_3 - S_1} S$ no pertenece a D puesto que $\alpha_2 (S_3 - S_1) - Y = S_3^* - S_1^* - Y = -(S_3 - S_1) < 0$

Por lo tanto la única solución posible $\alpha_1 = 1$ contradice la hipótesis inicial asumida de que $\alpha \neq 1$.

De la inyectividad de $D(S)$ se sigue que existe una función $g(D)$ definida en el contradominio R , que nos permite expresar la inversa $S = S(D)$ en la siguiente forma:

$$S(D) = \frac{D}{\gamma g(D)} = \frac{D}{\gamma h(S)} \quad \text{donde } g(.): R \rightarrow R \text{ está dada mediante la}$$

relación:

$$g(D) = \frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 = h(S)$$

Previamente a obtener la inversa $S(D)$ será necesario determinar $g(D)$. Para ello particularizamos la relación siguiente:

$$h(S) = h \left[\frac{D}{\gamma g(D)} \right] = g(D)$$

para la función $h(S) = \frac{S - S_1}{Y} - 1$, obteniéndose:

$$g(D) = \frac{D - D_1}{\gamma Y g(D)} - 1$$

De la igualdad anterior y teniendo en cuenta que $g(D) > 0$ se sigue que:

$$g(D) = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \left[1 + \frac{4(D - D_1)}{\gamma Y} \right]^{1/2} \right\}$$

Introduciendo $g(D)$ en $S(D) = \frac{D}{g(D)}$ se arriba a la inversa de la ley viscoplástica de PERZYNA - von MISES- TRESCA:

$$S = S(D) = \frac{Y}{2(D_3 - D_1)} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4(D - D_1)}{\gamma Y} \right]^{1/2} \right\} D$$

III. 4. Obtención de las Leyes Constitutivas de Plasticidad ideal a partir del Modelo Viscoplastico.

A seguir pondremos en evidencia como los modelos de

plasticidad ideal presentados en el Capítulo I, pueden ser obtenidos como casos particulares de viscoplasticidad.

Nuestro análisis será particularizado para los modelos viscoplásticos estudiados en este capítulo, determinando los límites de las leyes que denominamos de PERZYNA-von MISES, PERZYNA-TRESCA y PERZYNA-von MISES-TRESCA para $\chi \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ y mostrando que en el límite dichas leyes coinciden con las de plasticidad ideal.

Teniendo en cuenta que en las leyes constitutivas de plasticidad ideal están indeterminadas las deformaciones en función de las tensiones, no sucediendo lo mismo en el caso de las leyes inversas o sea las tensiones en función de las deformaciones, analizaremos en todos los casos el límite de la ley constitutiva y el de su correspondiente inversa.

Ley Viscoplástica Asociativa de PERZYNA-von MISES.

Designamos como ley de PERZYNA-von MISES a la siguiente relación constitutiva:

$$D = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right)^n > J_2^{-1/2} S$$

obtenida a partir de la ley $D = \gamma \langle \phi(f) \rangle$ f_T empleando $\phi(f) = \left(\frac{f}{\chi} \right)^n$ y $f = J_2^{1/2} - \chi$.

Su correspondiente inversa $S = S(D)$ fue determinada en el párrafo III.3.1 obteniéndose la expresión:

$$S = S(D) = \chi \left[\left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right] L_2^{-1/2} D$$

Analizaremos la ecuación constitutiva $D = D(S)$ y su inversa $S = S(D)$ para $\chi \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$.

El límite de la relación $S = S(D)$ es inmediato:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} S(D) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi \left[\left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right] L_2^{-1/2} D = \chi L_2^{-1/2} D$$

Sin embargo para determinar el límite de $D(S)$ es necesario recordar que las funciones $h(S)$ y $g(D)$ introducidas en el párrafo III.3.1:

$$h(S) = \frac{1}{2} \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right)^n J_2^{-1/2}, \quad g(D) = \frac{L_2^{1/2}}{\gamma \chi \left[\left(\frac{2L_2^{1/2}}{\gamma} \right)^{1/n} + 1 \right]}$$

verifican la relación $h(S) = g(D)$, figura III.14

De lo anterior se sigue que si $\chi \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ resulta: $h(S) = g(D) \rightarrow 0$.

Por lo tanto el límite de la relación constitutiva $D = D(S)$, que puede ser reescrita como $D = \gamma h(S) S$, resulta indeterminado puesto que $\gamma \rightarrow \infty$ y $h(S) \rightarrow 0$.

De lo anterior concluimos que en el límite cuando $\chi \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ la relación constitutiva viscoplástica que denominamos PERZYNA-von MISES coincide con la ley de plasticidad ideal de von MISES.

$$D = \dot{\lambda} S, \quad S = \chi L_2^{-1/2} D$$

Ley Viscoplastica Asociativa de PERZYNA-TRESCA.

Como fue observado en el párrafo III.3.3, la ley constitutiva viscoplastica de PERZYNA-TRESCA y su correspondiente inversa están dadas por las expresiones:

$$D_3 = -D_1 = \gamma \left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^n, \quad T_3 - T_1 = Y \left[1 + \left(\frac{D_3}{\gamma} \right)^{1/n} \right]$$

Analizaremos el límite de ambas expresiones para $\gamma \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$.

El límite de la inversa es inmediato:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (T_3 - T_1) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} Y \left[1 + \left(\frac{D_3}{\gamma} \right)^{1/n} \right] = Y$$

Introduciendo el resultado anterior en la ley constitutiva $D_3 = D_3 (T_3 - T_1)$, se sigue que D_3 queda indeterminado pues en el límite resulta el producto de $\gamma \rightarrow \infty$ por $\left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^n \rightarrow 0$.

De lo anterior concluimos que en el límite cuando $\gamma \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ la relación constitutiva viscoplastica de PERZYNA-TRESCA coincide con la ley de plasticidad ideal de TRESCA.

$$D_3 = -D_1 = \dot{\lambda}, \quad T_3 - T_1 = Y$$

Ley Viscoplastica no Asociativa de PERZYNA-von MISES-TRESCA.

La ley constitutiva de PERZYNA-von MISES-TRESCA y su

correspondiente inversa para $n = 2$, estudiadas en el párrafo III.3.4 , están dadas por:

$$D(S) = \gamma \left(\frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 \right) > S$$

$$S(D) = \frac{Y}{2(D_3 - D_1)} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4(D_3 - D_1)}{\gamma Y} \right]^{1/2} \right\} D$$

Analizaremos el límite de ambas expresiones $D(S)$ y $S(D)$ para $Y \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$.

El límite de la ley constitutiva inversa es inmediatato:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} S(D) = \frac{Y}{D_3 - D_1} D$$

Sin embargo para determinar el límite de $D(S)$ hay que tener en cuenta que las funciones $h(S)$ y $g(D)$ introducidas en el párrafo III.3.4

$$h(S) = \frac{S_3 - S_1}{Y} - 1 \quad ; \quad g(D) = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \left[1 + \frac{4(D_3 - D_1)}{\gamma Y} \right]^{1/2} \right\}$$

verifican la relación $h(S) = g(D)$.

En el límite cuando $\gamma \rightarrow \infty$, se tiene en forma inmediata que $g(D) \rightarrow 0$ y por lo tanto $h(S) \rightarrow 0$. De lo anterior se sigue que el límite de la relación constitutiva $D = D(S)$, que puede ser reescrita como $D = \gamma h(S) S$, resulta indeterminado puesto que $\gamma \rightarrow \infty$ y $h(S) \rightarrow 0$.

Concluimos que en el límite para $Y \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ la relación constitutiva viscoplástica de PERZYNA-von MISES-TRESCA coincide con la ley de plasticidad ideal de von MISES-TRESCA.

$$D = \dot{\lambda} S, \quad S = \frac{Y}{D_3 - D_1} D$$

III.5. Obtención de las Leyes de Creep Secundario como casos particulares de viscoplasticidad.

Los modelos de creep secundario así como los modelos de plasticidad ideal pueden ser obtenidos como casos particulares de viscoplasticidad.

Mostraremos a seguir que las leyes constitutivas viscoplásticas de PERZYNA-von MISES, PERZYNA-TRESCA y PERZYNA-von MISES-TRESCA en el caso particular de $\chi = 0$, conducen a las leyes de creep secundario presentadas en el Capítulo II.

Para las leyes asociativas la propiedad anterior será puesta en evidencia a nivel de los correspondientes potenciales, mostrando como se pasa del potencial viscoplástico al potencial de creep.

En el caso de la ley no asociativa de PERZYNA-von MISES-TRESCA, la obtención del correspondiente modelo de creep será realizada a nivel de ecuación constitutiva.

Ley Asociativa Viscoplástica de PERZYNA-von MISES.

De la ley potencial de PERZYNA y de la función de fluencia de von MISES se obtuvieron en el párrafo III.3.3 la ley viscoplástica que denominamos de PERZYNA-von MISES y su correspondiente potencial Φ .

$$D = \frac{\gamma}{2} \left\langle \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right)^n \right\rangle J_2^{-1/2} S, \quad \Phi = \frac{\gamma}{(n+1)\chi^n} \left\langle (J_2^{1/2} - \chi)^{n+1} \right\rangle$$

Introduciendo la tensión efectiva $T_e = \sqrt{3} J_2^{1/2}$ y la tensión de fluencia en tracción $Y = \sqrt{3}\chi$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$D = \frac{\sqrt{3}\gamma}{2Y^n} \left\langle (T_e - Y)^n \right\rangle \frac{S}{T_e}, \quad \Phi = \frac{\gamma}{\sqrt{3}(n+1)Y^n} \left\langle (T_e - Y)^{n+1} \right\rangle$$

Haciendo $k = \frac{\gamma}{\sqrt{3}Y^n}$ e $Y = 0$ se tiene:

$$D = \frac{3}{2} k T_e^{n-1} S, \quad \Phi = \frac{k}{n+1} T_e^{n+1}$$

Concluimos por tanto que cuando se hace $Y = \sqrt{3}\chi = 0$, la relación constitutiva viscoplástica de PERZYNA-von MISES coincide con la ley de creep secundario de von MISES-ODQVIST.

Ley Asociativa Viscoplástica de PERZYNA-TRESCA.

Empleando la ley potencial de PERZYNA y la función de fluencia de TRESCA se arribó, párrafo III.3.3 a la ley vis-

plástica de PERZYNA-TRESCA y su correspondiente potencial Φ :

$$D_3 = -D_1 = \gamma < \left(\frac{T_3 - T_1}{Y} - 1 \right)^n > , \quad \Phi = \frac{\gamma}{(n+1)Y^n} < (T_3 - T_1 - Y)^{n+1} >$$

Haciendo $k = \gamma Y^{-n}$ e $Y = 0$, resulta:

$$D_3 = -D_1 = k (T_3 - T_1)^n , \quad \Phi = \frac{k}{n+1} (T_3 - T_1)^{n+1}$$

De lo anterior se sigue que cuando se hace $Y = 0$ la relación constitutiva viscoplástica de PERZYNA-TRESCA se reduce a la ley de creep secundario de TRESCA.

Ley no Asociativa Viscoplástica de PERZYNA-von MISES-TRESCA.

De la ley viscoplástica de PERZYNA-von MISES-TRESCA analizada en el párrafo III.3.3 y dada por la expresión:

$$D = \gamma < \left(\frac{S - S_0}{Y} - 1 \right)^{n-1} > S$$

haciendo $k = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{Y^{n-1}}$ e $Y = 0$ se obtiene la ley no asociativa de creep secundario de von MISES-TRESCA.

$$D = \frac{3}{2} k (S - S_0)^{n-1} S$$

Con lo anterior queda mostrado que las leyes de creep

secundario presentadas en el Capítulo II, pueden ser obtenidas a partir de modelos viscoplásticos correspondientes, haciendo que la región del espacio de tensiones donde el material se comporta rigidamente $f(T) \leq 0$, tienda a $T = 0$.

III.6. Generalización de la Ley Viscopelástica de PERZYNA.

La ley constitutiva propuesta por PERZYNA:

$$D = \gamma \langle \phi \rangle f_T$$

puede ser generalizada para el caso de materiales isotrópicos. Para ello se admite que la función de fluencia f puede ser expresada como una función de los invariantes del tensor T .

$$f = f(I_1, I_2, I_3)$$

donde:

$$I_1 = \text{tr } T, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[\text{tr}(TT) - (\text{tr } T)^2 \right], \quad I_3 = \det T$$

Derivando f con respecto a T se tiene:

$$f_T = \frac{df}{dT} = \frac{\partial f}{\partial I_1} (I_1)_T + \frac{\partial f}{\partial I_2} (I_2)_T + \frac{\partial f}{\partial I_3} (I_3)_T$$

donde:

$$(I_1)_T = I \quad , \quad (I_2)_T = T - (\text{tr } T)I \quad , \quad (I_3)_T = (I_2)_T^T - I_2^T T$$

Sin embargo resultan expresiones más simples si trabajamos con los invariantes J_2 y J_3 del tensor desviador.

Recordando las relaciones entre los invariantes de T y S :

$$I_2 = J_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \quad , \quad I_3 = J_3 - \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2$$

es posible expresar f en una forma más conveniente o sea como función de (I_1, J_2, J_3) , o sea:

$$f = f(I_1, J_2, J_3)$$

Derivando f con respecto a T , obtenemos:

$$f_T = \frac{df}{dT} = \frac{\partial f}{\partial I_1} (I_1)_T + \frac{\partial f}{\partial J_2} (J_2)_T + \frac{\partial f}{\partial J_3} (J_3)_T$$

Recordando que las derivadas de I_1, J_2, J_3 con respecto a T están dadas por:

$$(I_1)_T = I \quad , \quad (J_2)_T = S \quad , \quad (J_3)_T = SS - \frac{2}{3} J_2 I$$

la expresión f_T resulta:

$$\begin{aligned}
 f_T &= \frac{\partial f}{\partial I_1} I + \frac{\partial f}{\partial J_2} S + \frac{\partial f}{\partial J_3} \left[SS - \frac{2}{3} J^2 I \right] \\
 &= \left[\frac{\partial f}{\partial I_1} - \frac{2}{3} J^2 \frac{\partial f}{\partial J_3} \right] I + \frac{\partial f}{\partial J_2} S + \frac{\partial f}{\partial J_3} SS
 \end{aligned}$$

un polinomio en S de grado 2, cuyos coeficientes son funciones de los invariantes (I_1, J_2, J_3) .

Es posible también expresar f_T como la aplicación de un tensor de cuarto orden Π sobre S .

Introduciendo las relaciones:

$$I = \frac{S \cdot S}{S \cdot S} I = \frac{I \otimes S}{S \cdot S} S = \frac{I \otimes S}{2J_2} S$$

$$SS = \frac{S \cdot S}{S \cdot S} SS = \frac{SS \otimes S}{2J_2} S$$

$$S = II S$$

en la expresión de f_T se tiene:

$$f_T = \Pi S$$

$$\text{donde: } \Pi = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{I \otimes S}{2J_2} + \frac{\partial f}{\partial J_2} II + \frac{\partial f}{\partial J_3} \left[\frac{SS \otimes S}{2J_2} - \frac{1}{3} I \otimes S \right]$$

Concluimos que para materiales isotrópicos la ley formulada por PERZYNA toma la forma:

$$D = \gamma \langle \Phi \rangle \Pi S$$

donde las funciones ϕ y f son dadas para cada caso particular.

III.6.1 Condición de Incompresibilidad.

Mostraremos a seguir que la condición de incompresibilidad en las deformaciones viscoplásticas de materiales que satisfacen la ley constitutiva $D = \gamma \langle \phi \rangle f_T$, introduce restricciones en la función de fluencia.

De la relación constitutiva, se sigue que la condición necesaria para que las deformaciones viscoplásticas sean a volumen constante es que:

$$\text{tr } D = \text{tr } f_T = f_T \cdot I = 0$$

Si el material es isotrópico, la condición anterior resulta:

$$f_T \cdot I = \frac{\partial f}{\partial I_1} I \cdot I + \frac{\partial f}{\partial J_2} S \cdot I + \frac{\partial f}{\partial J_3} \left[SS - \frac{2}{3} J_2 I \right] \cdot I = 0$$

teniendo en cuenta que S , y $\left[SS - \frac{2}{3} J_2 I \right]$ son tensores desviadores:

$$S = \left[II - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] T, \quad SS - \frac{2}{3} J_2 I = \left[II - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] SS$$

de la relación anterior se sigue que:

$$f_{,T} \cdot I = \frac{\partial f}{\partial I_1} I \cdot I = 3 \frac{\partial f}{\partial I_1} = 0$$

Concluimos por tanto que un material isotrópico que admite la ley de PERZYNA, para tener deformaciones viscoplásticas isocóricas es necesario que la función de fluencia correspondiente no dependa de I_1 . En este caso particular $f = f(J_2, J_3)$

Debe notarse finalmente que PRAGER²⁶ analizando el caso de deformaciones plásticas incompresibles y admitiendo que D puede ser expresada como potencias de S arriba a expresiones similares.

III.7. Problema de Valor de Contorno en Viscoplasticidad estacionaria.

Sea un cuerpo de material viscoplástico que ocupa Ω en una región Ω de contorno Γ del espacio euclideo tridimensional, figura II.5.

Dicho cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas (b, \bar{a})

$$\begin{array}{lll} b = b(X) & \text{en } \Omega & \text{fuerza de volumen} \\ \bar{a} = \bar{a}(X) & \text{en } \Gamma_T & \text{fuerza de superficie} \end{array}$$

y a una velocidad prescrita \bar{v} :

$$\bar{v} = \bar{v}(X) \quad \text{en } \Gamma_v$$

El problema de valor de contorno en viscoplasticidad es tacionaria consiste en determinar los campos: $v = v(X)$ velocidad, $D = D(X)$ velocidad de deformación, $T = T(X)$ tensión, que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de equilibrio

$$\operatorname{div} T + b = \rho \ddot{x} \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones cinemáticas

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) = (\nabla v)^S \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones constitutivas

$$D = \gamma \phi(f) f_T \quad \text{en } \Omega$$

Con las condiciones de contorno:

$$Tn = \bar{a} \quad \text{en } \Gamma_T, \quad v = \bar{v} \quad \text{en } \Gamma_v$$

donde n es la normal saliente al contorno Γ .

Nótese que estamos admitiendo que el estado tensional en todos los puntos de Ω es tal que $f(T) > 0$, lo que nos permite expresar la ley constitutiva como $D = \gamma \phi(f) f_T$.

III.8. Ejemplo de Aplicación.

A seguir presentaremos como ejemplo de aplicación un problema de valor de contorno en viscoplasticidad estacionario, relacionado al caso de una esfera hueca con presión interna.

EJEMPLO 1: Esfera hueca con presión interna.

Sea una esfera hueca de pared espesa, radio interno r_i y radio externo r_e , constituida de un material que satisface la ley viscoplástica de PERZYNA-von MISES, sometida a una presión interna constante p .

En coordenadas esféricas r, ϕ, θ , las componentes del tensor desviador S y su segundo invariante J_2 están dados por:

$$[S_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(T_r - T_\phi) & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi - T_r & 0 \\ 0 & 0 & T_\phi - T_r \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S = \frac{1}{3} (T_\phi - T_r)^2$$

Teniendo en cuenta, como será comprobado más adelante, que $T_\phi > T_r$ en todo el intervalo $r_i \leq r \leq r_e$, se sigue que

$$J_2^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (T_\phi - T_r)$$

i) *Ecuación de equilibrio*

Ya fue observado, que en el caso de simetría esférica si las fuerzas de volumen son nulas, la condición de equilibrio

$\text{div } T + b = 0$ se reduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT_r}{dr} + 2 \frac{T_r - T_\phi}{r} = 0$$

ii) *Ecuaciones cinemáticas*

De la simetría del problema resulta que las únicas componentes de D no nulas son:

$$D_r = \frac{dv}{dr}, \quad D_\phi = D_\theta = \frac{v}{r}$$

iii) *Ecuación constitutiva*

Como fue observado, este ejemplo será analizado para la ley constitutiva viscoplástica de PERZYNA-von MISES dada por la siguiente expresión:

$$D = \frac{\gamma}{2} \left\langle \frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right\rangle^n > \frac{S}{J_2^{1/2}}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $J_2^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_\phi - T_r)$

la ley constitutiva se reduce a:

$$D = \frac{\gamma}{2} \left\langle \frac{T_\phi - T_r}{\gamma} - 1 \right\rangle^n > \frac{\sqrt{3}}{T_\phi - T_r} S$$

Admitiendo que la presión p es tal que en todo punto de la esfera se verifica que $T_\phi - T_r > \gamma$, las componentes D_r , D_ϕ y D_θ resultan:

$$D_r = - \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \left(\frac{T_\phi - T_r}{\gamma} - 1 \right)^n$$

$$D_{\phi} = D_{\theta} = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \left(\frac{T_{\phi} - T_r}{\gamma} - 1 \right)^n$$

iv) *Condiciones de contorno*

Las condiciones de contorno se reducen a:

$$T_r(r_i) = -p, \quad T_r(r_e) = 0$$

v) *Solución del problema de valor de contorno*

De la isocoridad, $\text{tr } D = 0$, se sigue que:

$$D_r + D_{\phi} + D_{\theta} = \frac{dv}{dr} + \frac{2v}{r} = 0$$

Integrando la ecuación diferencial anterior se obtiene $v(r) = C_1 r^{-2}$.

Del valor $v(r)$ determinado y de la relación constitutiva: $D_{\phi} = \frac{v}{r} = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \left(\frac{T_{\phi} - T_r}{\gamma} - 1 \right)^n$ se sigue que:

$$T_{\phi} - T_r = \gamma \left[\left(\frac{2\sqrt{3}C_1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{n}} r^{-\frac{3}{n}} + 1 \right]$$

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación de equilibrio e integrando obtenemos T_r .

$$T_r = 2\gamma \left[\left(\frac{2\sqrt{3}C_1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{n}{3} r^{-3/n} + Lr \right] + C_2$$

De las condiciones de contorno $T_r(r_i) = -p$, $T_r(r_e) = 0$, las constantes C_1 y C_2 pueden ser determinadas:

$$C_1 = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \left[\frac{3}{n(r_i^{-3/n} - r_e^{-3/n})} \left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right) \right]^n$$

$$C_2 = 2Y \left[\frac{r_e^{-3/n}}{r_i^{-3/n} - r_e^{-3/n}} \left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right) - L r_e \right]$$

Introduciendo las constantes C_1 y C_2 en las expresiones de T_r , T_ϕ , T_θ , $J_2^{1/2}$ y v se arriba a la solución exacta del problema viscoplástico.

$$T_r = \frac{1}{\alpha_n} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} - 1 \right] (2YL \frac{r_e}{r_i} - p) - 2YL \frac{r_e}{r}$$

$$T_\phi = T_\theta = \frac{1}{\alpha_n} \left[\left(\frac{3}{2n} - 1 \right) \left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} + 1 \right] (p - 2YL \frac{r_e}{r_i}) + Y - 2YL \frac{r_e}{r}$$

$$J_2^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2n\alpha_n} \left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} (p - 2YL \frac{r_e}{r_i}) + \frac{Y}{\sqrt{3}}$$

$$v = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \left[\frac{3}{n\alpha_n} \left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} \left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right) \right]^n r$$

$$\text{donde } \alpha_n = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\frac{3}{n}} - 1$$

vi) *Viscoplasticidad ley de HOHENEMSER-PRAGER.*

Como ya fue observado, párrafo III.3, cuando $n = 1$ la ley visco-

plástica de PERZYNA-von MISES se reduce a la de HOHNEMSER-PRAGER.

Por lo tanto haciendo $n = 1$ en las expresiones T_r , T_ϕ , T_θ y v , se obtiene la solución del problema para la ley viscoplástica de HOHNEMSER-PRAGER:

$$T_r = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] \left(2YL \frac{r_e}{r_i} - p \right) - 2YL \frac{r_e}{r}$$

$$T_\phi = T_\theta = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] \left(p - 2YL \frac{r_e}{r_i} \right) + Y - 2YL \frac{r_e}{r}$$

$$v = \frac{Y}{2\sqrt{3}} \left[\frac{3}{\alpha} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right) \right] r$$

$$\text{donde } \alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^3 - 1$$

vii) *Plasticidad ideal ley de von-MISES.*

Al determinar la solución del problema viscoplástico de la esfera se admitió que en todo punto, la tensión pertenece al dominio viscoplástico $f = J_2^{1/2} - \chi > 0$. De la expresión a que se arribó para $J_2^{1/2}$ se sigue que $p > 2YL \frac{r_e}{r_i}$

En el límite cuando $p = 2YL \frac{r_e}{r_i}$, se tienen los siguientes valores de T_r , T_ϕ , $J_2^{1/2}$ y f :

$$T_r = - 2YL \frac{r_e}{r}, \quad T_\phi = Y - 2YL \frac{r_e}{r}, \quad J_2^{1/2} = \frac{Y}{\sqrt{3}}, \quad f = 0$$

Si el material es viscoplástico (γ finito) resulta además $v = 0$.

La solución del problema plástico se obtiene, haciendo que $f \rightarrow 0$, de donde se deduce que la presión $p \rightarrow 2YL \frac{r_e}{r_i}$. Por lo tanto cuando p es igual a la carga límite, la distribución de tensiones T_r y T_ϕ en el caso plástico y viscoplástico coinciden.

Sin embargo, la velocidad que es nula en el caso viscoplástico pasa a ser indeterminada en el caso plástico puesto que resulta el producto de γ que tiende a infinito por $\left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i}\right)^n$ que tiende a cero.

viii) *Creep secundario ley de von MISES-ODQVIST.*

En el párrafo III.5 fue mostrado que es posible obtener la ley de creep secundario de von MISES-ODQVIST a partir de la ley viscoplástica de PERZYNA-von MISES. Haciendo $k = \frac{Y}{\sqrt{3}Y^n}$ e $Y = 0$ en

las expresiones de T_r , T_ϕ y v correspondientes a la solución del problema viscoplástico, se tiene la solución del problema de creep secundario analizado en el Capítulo II.

$$T_r = - \frac{p}{\alpha_n} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} - 1 \right], \quad T_\phi = \frac{p}{\alpha_n} \left[\left(\frac{3}{2n} - 1 \right) \left(\frac{r_e}{r} \right)^{\frac{3}{n}} + 1 \right]$$

$$v = \frac{k}{2} \left(\frac{3p}{2n\alpha_n} \right)^n \frac{r_e^3}{r^2} \quad \text{donde} \quad \alpha_n = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^{\frac{3}{n}} - 1$$

CAPITULO IV

ELASTO/VISCOPLASTICIDAD

Como ya fue observado, en mecánica de sólidos es usual estudiar por separado las propiedades plásticas y las propiedades reológicas de los materiales.

Ambas ciencias, tanto la plasticidad como la reología, se han desarrollado creando sus propios métodos de investigación basándose en hipótesis simplificativas que traen aparejadas restricciones en sus respectivos campos de aplicación.

Así por ejemplo al analizar los fenómenos plásticos la hipótesis común a todas las teorías es admitir que las deformaciones dependen de la historia de cómo esas deformaciones fueron procesadas, y no del tiempo. Esa independencia del tiempo hace imposible que las teorías de plasticidad puedan llevar en cuenta fenómenos reológicos.

Por lo tanto, cuando los efectos reológicos pueden ser despreciados es posible tener mediante la teoría de la plasticidad una descripción real del fenómeno. Un ejemplo de lo anterior, son los procesos cuasi-estáticos de corta duración, donde no es necesario llevar en cuenta efectos de creep o relajación.

Lo mismo a la inversa, cuando se analizan efectos reológicos, las teorías viscosas empleadas no hacen posible llevar en cuenta al mismo tiempo fenómenos plásticos. Sin embargo, los ensayos mecánicos de metales ponen en evidencia que los efectos reológicos, siempre presentes, dependen de la velocidad de carga obteniéndose en correspondencia tensiones superiores al del ensa

yo estático a medida que dicha velocidad aumenta.

En el acero normal, donde múltiples estudios experimentales se han realizado ^{44, 45} una sollicitación rápida puede hasta triplicar el valor de la tensión de fluencia y producir según la velocidad una marcada reducción en el fenómeno de endurecimiento.

A lo anterior se deben, seguramente, las discrepancias que en muchos casos surgen entre los resultados experimentales del análisis de materiales, sometidos a cargas variables en el tiempo, con los obtenidos mediante la aplicación de la Teoría de la plasticidad, en que los fenómenos reológicos no son llevados en cuenta.

Los ensayos de metales muestran además que los efectos reológicos se presentan en forma más pronunciada cuando el estado plástico es alcanzado. Lo anterior hace posible que en muchos casos los efectos reológicos sean despreciados en la zona elástica inicial y solamente tenidos en cuenta cuando se alcanza la zona plástica.

A diferencia de la elasto viscoplasticidad en la que se consideran propiedades viscosas en todo el dominio de las tensiones, en elasto/viscoplasticidad se considera viscosidad solamente en el dominio plástico ^{46, 47}.

Por lo tanto, en la teoría elasto/viscoplástica se admite la existencia de una región del espacio de tensiones dentro de la cual el material se comporta elásticamente y fuera de ella tanto propiedades plásticas como viscosas son llevadas en cuenta, independientemente si las cargas aumentan o disminuyen.

En este caso se hace necesario determinar una función de fluencia que divide el espacio de tensiones en dos zonas, una elástica y otra viscoplástica, así como también establecer una

relación constitutiva para estados de tensión correspondientes a ambas regiones. Lo anterior será realizado como una extensión del modelo viscoplástico presentado en el capítulo anterior.

Finalmente cabe establecer que el modelo elasto/viscoplástico a ser analizado en este capítulo, presenta la ventaja adicional de que a partir de él se pueden obtener los modelos de elastoplasticidad, elasto creep, creep secundario, y viscoplasticidad estacionaria, estudiados en los capítulos anteriores.

A seguir se presenta una ley constitutiva general en elasto/viscoplasticidad y los casos particulares estudiados por FREUDENTHAL ⁴⁷ y PERZYNA ⁴⁰.

Para dicha ley general se muestra la existencia de inversa y de potenciales elasto/viscoplásticos a partir de los cuales las leyes constitutivas pueden ser derivadas.

La convexidad de los potenciales, necesaria en la formulación de principios variacionales de mínimo, es también verificada.

Presentadas las leyes constitutivas, se formula el problema de valor de contorno cuasi-estático, con condiciones iniciales en elasto/viscoplasticidad y se estudia como ejemplo el caso de recipientes esféricos con presión interna, donde es posible obtener solución exacta.

Finalmente haciendo uso de las propiedades de convexidad de los potenciales, se muestra cómo arribar a principios variacionales en elasto/viscoplasticidad. Dichos principios resultan generalmente de gran utilidad en la obtención de soluciones aproximadas y en particular los de mínimo permiten mostrar unicidad de las soluciones.

Partiendo del principio del trabajo virtual y teniendo en cuenta la ley constitutiva de materiales elasto/viscoplá-

ticos, se deducen los funcionales de energía y energía complementaria, que permiten enunciar los principios de mínima energía potencial y mínima energía potencial complementaria.

Se deducen también a partir de estos dos últimos funcionales, el funcional generalizado de tres campos y el funcional de HELLINGER-REISSNER, de dos campos^{4 8}.

La equivalencia del problema de valor de contorno con la condición de mínimo o estacionaridad de los funcionales anteriores es mostrada al determinar las ecuaciones de EULER y las condiciones naturales de contorno correspondientes a cada funcional.

IV.1. Ley Constitutiva en Elasto/viscoplasticidad.

En elasto/viscoplasticidad se admite la existencia de una función de fluencia $f(T, \chi) = 0$, similar a la empleada en plasticidad o viscoplasticidad, que permite definir dos regiones Ω^e y Ω^{vp} en el espacio de tensiones:

$$\Omega^e = \{ T \in \text{Sym} \ ; \ f(T, \chi) < 0 \}$$

$$\Omega^{vp} = \{ T \in \text{Sym} \ ; \ f(T, \chi) > 0 \}$$

La región Ω^e verifica las siguientes propiedades:

- i) la función de fluencia inicial contiene al origen $T = 0$, o sea que $0 \in \Omega^e$
- ii) es convexa, o sea que para dos valores de T , $T^1 \neq T^2 \in \Omega^e$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ se tiene que $T = T^1 + \alpha(T^2 - T^1) \in \Omega^e$.

En elasto/viscoplasticidad se supone además que el comportamiento del material depende del estado tensional si $T \in \Omega^e$ es elástico y si $T \in \Omega^{vp}$ es elasto viscoplástico.

Admitiendo que la deformación total D puede ser descompuesta en dos sumandos, la ley constitutiva está dada por:

$$D = \begin{cases} D^e & \text{si } T \in \Omega^e \\ D^e + D^{vp} & \text{si } T \in \Omega^{vp} \end{cases}$$

La parte elástica D^e está relacionada con \dot{T} a través de la expresión:

$$D^e = ID \dot{T}$$

donde ID es el tensor de elasticidad de cuarto orden que satisface las propiedades de simetría, inversibilidad y positividad:

$$\text{simetría} \quad ID = ID^T$$

$$\text{inversibilidad} \quad ID ID^{-1} = II$$

$$\text{positividad} \quad ID D \cdot D > 0, \quad D \in \{D \in \text{Sym}; D \neq 0\}$$

La parte viscoplástica D^{vp} está dada en función de T y χ a través de una ley viscoplástica similar a las estudiadas en el capítulo anterior.

$$D^{vp} = D^{vp}(T, \chi).$$

En la frontera de ambas regiones cuando $f(T, \chi) = 0$ la deformación viscoplástica D^{vp} es nula, por lo tanto se tiene que $D = D^e$.

Si χ es constante $\chi = T_{12}^Y$ la superficie de fluencia

$f(T, \chi)$ está fija en el espacio de tensiones, si χ es un parámetro que representa la historia de las deformaciones viscoplásticas, la superficie de fluencia $f(T, \chi)$ puede variar según los valores de χ .

Obsérvese que, tal como se ha presentado, elasto/viscoplasticidad resulta una generalización de viscoplasticidad, así como elastoplasticidad lo es con respecto a plasticidad. En ambas teorías se incluyen las deformaciones elásticas que se hacen presentes para todo valor T .

Sin embargo hay una diferencia fundamental entre elasto/viscoplasticidad y elasto-plasticidad. Dicha diferencia consiste que cuando se está en el dominio viscoplástico T e Ω^{VP} la deformación viscoplástica D^{VP} es diferente de cero, para cualquier valor de T , cosa que no sucede en elastoplasticidad.

FREUDENTHAL estudió la relación constitutiva anterior particularizada para el caso en que D^e y D^{VP} toman los valores siguientes^{4,7}:

D^e correspondiente a deformaciones en elasticidad isotrópica en que ID y ID^{-1} están dados por:

$$ID = 2\mu II + \lambda(I \otimes I)$$

$$ID^{-1} = \frac{1}{2\mu} \left[II - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} I \otimes I \right]$$

donde I y II son los tensores identidad de segundo y cuarto orden, y λ y μ las constantes de LAMÉ.

y D^{VP} la correspondiente deformación viscoplástica postulada por HOHENEMSER-PRAGER.

$$D^{VP} = \frac{\gamma}{2} < \frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 > J_2^{-1/2} S$$

Empleando la ley anterior WIERZBICKI analizó en va

rios trabajos ^{49, 50, 51}, el problema cuasi-estático de recipientes esféricos de pared espesa sometidos a carga constante, donde como se verá más adelante es posible obtener soluciones exactas en elasto/viscoplasticidad.

Posteriormente PERZYNA ⁴⁰ extendió la ley constitutiva estudiada por FREUDENTHAL, admitiendo que la parte viscoplástica satisface la ley postulada por él:

$$D^{vp} = \gamma \langle \phi(f^*) \rangle f_T$$

En este caso la ley constitutiva en elasto/viscoplasticidad se resume en una sola expresión:

$$D = D^{-1} \dot{T} + \gamma \langle \phi(f^*) \rangle f_T$$

De lo anterior se sigue que una relación constitutiva general en elasto/viscoplasticidad puede ser expresada en la siguiente forma:

$$D = D(\dot{T}, T, \chi) = D^{-1} \dot{T} + D^{vp}(T, \chi)$$

Como ya fue observado χ es un parámetro que representa la historia de la deformación.

Dicha ley nos dice que la velocidad de deformación D en un punto X de un sólido elasto/viscoplástico, está determinada cuando se conoce el estado de tensión T , la historia de la deformación viscoplástica χ y la velocidad de la tensión \dot{T} .

Una de las propiedades de la ley anterior es que puede ser derivada a partir de una función escalar de variable ten

social Φ denominada potencial elasto/viscoplástico.

La función potencial Φ está dada por:

$$\Phi(\dot{T}, D^{VP}) = \frac{1}{2} \dot{T} \cdot \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + \dot{T} \cdot D^{VP}$$

Derivando Φ con respecto a \dot{T} se tiene la relación constitutiva general de elasto/viscoplasticidad:

$$\Phi_{\dot{T}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{T}} = \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + D^{VP} = D$$

IV.1.2. Ley Constitutiva Inversa.

Designamos como inversa de la ley constitutiva elasto/viscoplástica a la expresión tensorial $\dot{T} = \dot{T}(D, T, \chi)$ obtenida a partir de la ley constitutiva anterior.

Teniendo en cuenta que $\mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{I}$ de la ley constitutiva se sigue que $\dot{T}(D, D^{VP})$ está dada por:

$$\dot{T}(D, D^{VP}) = \mathbb{D}(D - D^{VP})$$

Introduciendo la ley constitutiva viscoplástica $D^{VP} = D^{VP}(T, \chi)$ en la expresión anterior se tiene que la inversa \dot{T} puede ser expresada en función de D , T y χ .

$$\dot{T}(D, T, \chi) = \mathbb{D} \left[D - D^{VP}(T, \chi) \right]$$

Por lo tanto la ley inversa en elasto/viscoplasticidad permite

determinar \dot{T} cuando se conoce el estado de tensiones T , la historia de la deformación χ y la velocidad de deformación D .

Al igual que en el caso de la ley constitutiva existe una función potencial ψ a partir de la cual la ley inversa puede ser derivada.

A dicha expresión se puede arribar aplicando la transformada de LEGENDRE ⁵².

Dada una función $D(\dot{T}, D^{vp})$, su respectiva inversa $D^{-1}(D, D^{vp})$ que designamos con $\dot{T}(D, D^{vp})$ y el correspondiente potencial $\phi(\dot{T}, D^{vp})$ a partir del cual $D(\dot{T}, D^{vp})$ puede ser derivado, mediante la relación $D(\dot{T}, D^{vp}) = \phi_{\dot{T}}$, la transformada de LEGENDRE asegura la existencia de una función $\Psi(D, D^{vp})$ tal que las siguientes igualdades se verifican:

$$\Psi(D, D^{vp}) = \dot{T} \cdot D - \phi(\dot{T}, D^{vp})$$

$$\Psi_D = \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \dot{T}$$

Para determinar la expresión de ψ introducimos las expresiones $T = \mathbb{D}(D - D^{vp})$ y $\phi(\dot{T}, D^{vp}) = \frac{1}{2} T \cdot \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + \dot{T} \cdot D^{vp}$ en la relación anterior, obteniéndose:

$$\Psi(D, D^{vp}) = \frac{1}{2} D \cdot \mathbb{D} D - D \cdot \mathbb{D} D^{vp}$$

Derivándose $\Psi(D, D^{vp})$ con respecto a D , se sigue que:

$$\Psi_D = \mathbb{D}(D - D^{vp}) = \dot{T}$$

Concluimos por lo tanto que la función escalar de argumento ten

sorial:

$$\Psi(D, D^{VP}) = \frac{1}{2} D \cdot D D - D \cdot D D^{VP}$$

es el correspondiente potencial de la ley constitutiva inversa en elasto/viscoplasticidad.

IV.1.3. Modelo Mecánico Equivalente.

Para estados tensionales simples tales como corte puro o tracción simple la relación constitutiva elasto/vicoplástica se reduce a una relación entre escalares.

En estos casos es posible efectuar la analogía de la ley constitutiva con un modelo mecánico simple.

Analizaremos la ley constitutiva elasto/viscoplastica propuesta por PERZYNA para el caso de corte puro.

Para el caso particular de corte puro $T_{12} \neq 0$ la ley constitutiva:

$$D = D^{-1} \dot{T} + \frac{\gamma}{2} < \phi \left(\frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 \right) > J_2^{-1/2} S$$

se reduce a la siguiente relación entre escalares:

$$D_{12} = \frac{1}{2\mu} \dot{T}_{12} + \frac{\gamma}{2} < \phi \left(\frac{|T_{12}|}{\chi} - 1 \right) > \frac{T_{12}}{|T_{12}|}$$

La velocidad de deformación D_{12} es la suma de una

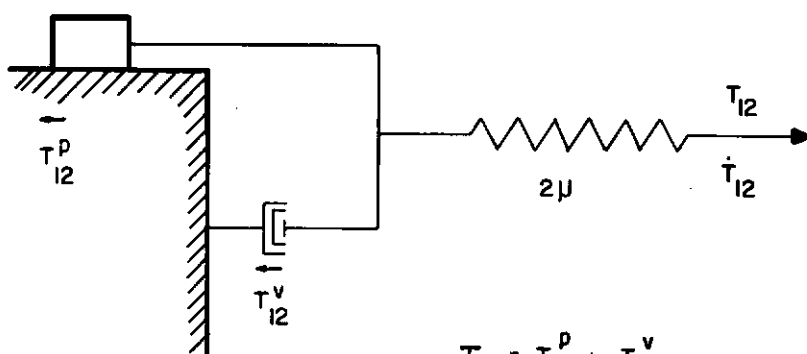
parte elástica D_{12}^e más otra viscoplástica D_{12}^{vp} .

$$D_{12}^e = \frac{1}{2\mu} T_{12} \quad ; \quad D_{12}^{vp} = \frac{\gamma}{2} < \phi > \frac{T_{12}}{|T_{12}|}$$

La parte viscoplástica D_{12}^{vp} fue analizada en el capítulo anterior donde se mostró que puede ser representada por un modelo mecánico equivalente constituido por un elemento friccioso y un amortiguador colocados en paralelo. fig. III.15.

En el caso particular de la ley de HOHENEMSER-PRAGER dicho amortiguador resulta lineal, fig.III.5.

Para la ley elasto/viscoplástica el modelo mecánico correspondiente está dado por un resorte colocado en serie con el modelo viscoplástico tal como indica la fig. IV.1.



$$T_{12} = T_{12}^p + T_{12}^v$$

$$D_{12} = D_{12}^e + D_{12}^{vp}$$

fig.IV.1.

El valor de D_{12} está determinado cuando se conocen T_{12} y \dot{T}_{12} . Para $T_{12} > \chi$ se tiene $D_{12}^{vp} \neq 0$ y si $\dot{T}_{12} \neq 0$ se tiene además $D_{12}^e \neq 0$.

También fue observado en el capítulo anterior que las leyes plásticas y de creep secundario pueden ser derivadas de las correspondientes leyes viscoplásticas. En el límite $\chi \neq 0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ se tiene el modelo plástico y haciendo $\chi = 0$ se arriba

al modelo de creep.

Por lo tanto los modelos mecánicos correspondientes a estos límites son los indicados en la figura IV.2.

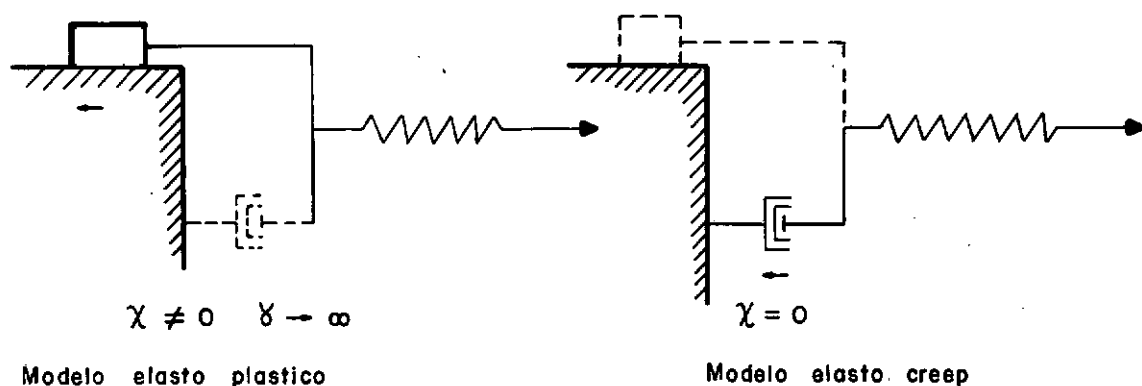


fig. IV.2.

IV.2. Problema de Valor de Contorno en Elasto/viscoplasticidad.

El problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad limitado al caso de deformaciones infinitesimales y procesos cuasi-estáticos puede formularse de la siguiente manera:

Sea un cuerpo de material elasto/viscoplástico que ocupa la región Ω de contorno Γ del espacio euclideo tridimensional. Dado el sistema de fuerzas (b, \bar{a}) donde:

$b = b(X, t)$, en $(X, t) \in \Omega \times [0, \tau]$ fuerza de volumen

$\bar{a} = \bar{a}(X, t)$, en $(X, t) \in \Omega_T \times [0, \tau]$ fuerza de superficie

y un desplazamiento prescripto \bar{u} :

$$\bar{u} = \bar{u}(X, t) \quad , \quad \text{en } (X, t) \in \Gamma_u \times [0, \tau]$$

determinar el desplazamiento $u(X, t)$, la deformación total $E(X, t)$ la deformación viscoplástica $E^{vp}(X, t)$, la tensión $T(X, t)$, el parámetro de endurecimiento $\chi(X, t)$ tal que satisfagan las siguientes ecuaciones:

Ecuación de equilibrio

$$\text{div } \dot{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones cinemáticas

$$D = \frac{1}{2} (\nabla \dot{u} + \nabla \dot{u}^T) = (\nabla \dot{u})^s \quad \text{en } \Omega$$

Ecuaciones constitutivas

$$\dot{T} = ID(D - D^{vp}) \quad \text{en } \Omega$$

$$D^{vp} = D^{vp}(T, \chi) = \gamma < \phi > f_T$$

$$\dot{\chi} = \chi \left(\int_0^t T \cdot D^{vp} dt \right)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\dot{T}n = \dot{\bar{a}} \quad \text{en } (X, t) \in \Gamma_T \times [0, \tau]$$

$$\dot{u} = \dot{\bar{u}} \quad \text{en } (X, t) \in \Gamma_u \times [0, \tau]$$

y las condiciones iniciales:

$$u(X, 0) = u_0(X) \quad , \quad E(X, 0) = E_0(X) \quad , \quad E^{vp}(X, 0) = E_0^{vp}(X) = 0$$

$$T(X,0) = T_0(X) \quad , \quad \chi(X,0) = \chi_0(X) .$$

asociadas a la solución del correspondiente problema elástico en el instante $t = 0$.

Γ_T y Γ_u son las partes del contorno Γ donde están prescritas las fuerzas y los desplazamientos, y n es la normal exterior a Γ .

IV.3. Ejemplo de Aplicación.

A seguir será analizado el caso cuasi-estático de recipientes esféricos de pared espesa sometidos a carga constante.

EJEMPLO 1: Esfera hueca con presión interna.

Sea una esfera hueca de pared espesa, radio interno r_i , radio externo r_e , sometida a una presión interna constante p y constituida de material elasto/viscoplástico.

Tal como fue observado, la deformación de los materiales elasto/viscoplásticos puede ser descompuesta en dos partes

$$D = D^e + D^{vp}$$

En este caso particular admitiremos que D^e satisface la ley constitutiva de elasticidad isotrópica y que D^{vp} verifica la ley constitutiva viscoplástica de HOHENEMSER-PRAGER.

De lo anterior se sigue que: $D = D^e + D^{vp}$ donde:

$$D^e = D^{-1} \dot{T} = \frac{1}{2\mu} \left[\Pi - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} I \otimes I \right] \dot{T}$$

$$D^{vp} = \frac{\gamma}{2} < \frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 > J_2^{-1/2} S$$

Teniendo en cuenta que un tensor simétrico está determinado cuando se conoce su trazo y su correspondiente desviador, la relación constitutiva puede descomponerse en dos relaciones, una entre trazos y otra entre desviadores.

Aplicando las operaciones trazo y desviador a la ley constitutiva anterior se obtienen las siguientes relaciones:

$$\text{tr } D = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{3\lambda}{2\mu + 3\lambda} \right) \text{tr } \dot{T} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \text{tr } \dot{T} = \frac{1}{3K} \text{tr } \dot{T}$$

$$\left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] D = \frac{1}{2\mu} \dot{S} + \frac{\gamma}{2} < \frac{J_2^{1/2}}{\chi} - 1 > J_2^{-1/2} S$$

Para expresar las ecuaciones del problema de valor de contorno particularizadas para el caso de la esfera, en coordenadas polares r, ϕ, θ , recordamos previamente que las componentes de T y S están dadas por:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_r & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi & 0 \\ 0 & 0 & T_\phi \end{bmatrix}, \quad [S_{ij}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(T_r - T_\phi) & 0 & 0 \\ 0 & T_\phi - T_r & 0 \\ 0 & 0 & T_\phi - T_r \end{bmatrix}$$

Admitiendo además que en todo punto de la esfera se verifica que $T_\phi > T_r$, resulta $J_2^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (T_\phi - T_r)$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones del

problema de valor de contorno, se tiene:

i) *Ecuación de equilibrio*

$$\frac{d T_r}{dr} + 2 \frac{T_r - T_\phi}{r} = 0$$

ii) *Ecuaciones cinemáticas*

$$D_r = \frac{d\dot{u}}{dr} , \quad D_\phi = D_\theta = \frac{\dot{u}}{r}$$

iii) *Ecuaciones constitutivas*

Recordando que al aplicar las operaciones trazo y desviador la ley constitutiva fue descompuesta en dos relaciones.

De la primera, o sea $\text{tr } D = \frac{1}{3K} \text{tr } \dot{T}$ se sigue:

$$D_r + 2D_\phi = \frac{1}{3K} (\dot{T}_r + 2\dot{T}_\phi)$$

De la segunda, o sea de la relación entre desviadores se obtiene que:

$$D_\phi - D_r = \frac{1}{2\mu} (\dot{T}_\phi - \dot{T}_r) + \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \left(\frac{\dot{T}_\phi - \dot{T}_r}{\sqrt{3}\chi} - 1 \right)$$

iv) *Condiciones de contorno*

$$T_r(r_i) = -p , \quad T_r(r_e) = 0$$

v) *Problema de valor de contorno con valor inicial*

El problema de valor de contorno con valor inicial correspondiente a la esfera hueca de material elasto/viscoplastico con presión interna, consiste en determinar los campos

$$T_r = T_r(r, t) \quad , \quad T_\phi = T_\phi(r, t) \quad , \quad u = u(r, t)$$

tales que satisfagan las ecuaciones:

$$\frac{d T_r}{dr} + 2 \frac{\dot{T}_r - \dot{T}_\phi}{r} = 0$$

$$3K \left(\frac{d\dot{u}}{dr} + 2 \frac{\dot{u}}{r} \right) = \dot{T}_r + 2\dot{T}_\phi$$

$$\frac{\dot{u}}{r} - \frac{d\dot{u}}{dr} = \frac{1}{2\mu} (T_\phi - T_r) + \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \left[\frac{\dot{T}_\phi - \dot{T}_r}{\sqrt{3}\chi} - 1 \right]$$

$$\text{en } (r, t) \in [r_i, r_e] \times [0, \tau] .$$

Con las condiciones de contorno:

$$T_r(r_i, t) = -p \quad , \quad T_r(r_e, t) = 0$$

y las condiciones iniciales:

$$u(r, 0) = u^0(r) \quad , \quad T_r(r, 0) = T_r^0(r) \quad , \quad T_\phi(r, 0) = T_\phi^0(r)$$

asociadas a la solución del correspondiente problema elástico:

$$\frac{d T_r^0}{dr} + 2 \frac{T_r^0 - T_\phi^0}{r} = 0$$

$$3K \left(\frac{d\dot{u}^0}{dr} + 2 \frac{\dot{u}^0}{r} \right) = T_r^0 + 2T_\phi^0$$

$$\frac{u^0}{r} - \frac{du^0}{dr} = \frac{1}{2\mu} (T_\phi^0 - T_r^0)$$

$$T_r^0(r_i) = -p \quad T_r^0(r_e) = 0$$

Dicho problema fue analizado en el ejemplo I.1 obteniéndose las siguientes expresiones para $u^0(r)$, $T_r^0(r)$, $T_\phi^0(r)$:

$$u^0(r) = \frac{rp}{\alpha} \left[\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right]$$

$$T_r^0(r) = -\frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right], \quad T_\phi^0(r) = \frac{p}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right]$$

donde $\alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^3 - 1$

vi) *Solución del problema de valor de contorno con valor inicial.*

La solución de nuestro problema $u(r,t)$, $T_r(r,t)$ y $T_\phi(r,t)$ será determinada empleando la transformada de Laplace.

Dicha transformada nos permite pasar del problema de valor de contorno con valor inicial en (r,t) a un problema de valor de contorno en (r,s) . Designando con \bar{u} , \bar{T}_r y \bar{T}_ϕ a las correspondientes transformadas de u , T_r y T_ϕ .

$$\bar{u}(r,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(r,t) dt$$

y recordando que la transformada de la derivada y de una constante están dadas por:

$$\dot{\bar{u}} = \bar{u} - u^0, \quad \bar{p} = p/s$$

las ecuaciones de nuestro problema en el campo transformado resultan:

$$s \left[\frac{d\bar{T}_r}{dr} + 2 \frac{\bar{T}_r - \bar{T}_\phi}{r} \right] - \left[\frac{dT_r^0}{dr} + 2 \frac{T_r^0 - T_\phi^0}{r} \right] = 0$$

$$3K \left[s \left(\frac{d\bar{u}}{dr} + 2 \frac{\bar{u}}{r} \right) - \left(\frac{du^0}{dr} + 2 \frac{u^0}{r} \right) \right] = s(\bar{T}_r + 2\bar{T}_\phi) - (T_r^0 + 2T_\phi^0)$$

$$s \left(\frac{\bar{u}}{r} - \frac{d\bar{u}}{dr} \right) - \left(\frac{u^0}{r} - \frac{du^0}{dr} \right) = \frac{s}{2\mu} (\bar{T}_\phi - \bar{T}_r) - \frac{1}{2\mu} (T_\phi^0 - T_r^0) + \frac{\sqrt{3}}{2\gamma} \left[\frac{\bar{T}_\phi - \bar{T}_r}{\sqrt{3}\chi} - \frac{1}{s} \right]$$

y las condiciones de contorno en el campo transformado:

$$\bar{T}_r(r_i, s) = -p/s, \quad \bar{T}_r(r_e, s) = 0$$

Teniendo en cuenta que los valores iniciales u^0 , T_r^0 y T_ϕ^0 son conocidos, el problema de valor de contorno en el dominio transformado se reduce a:

$$\frac{d\bar{T}_r}{dr} + 2 \frac{\bar{T}_r - \bar{T}_\phi}{r} = 0$$

$$3K \left(\frac{d\bar{u}}{dr} + 2 \frac{\bar{u}}{r} \right) = \bar{T}_r + 2\bar{T}_\phi$$

$$s \left(\frac{\bar{u}}{r} - \frac{d\bar{u}}{dr} \right) = \left(\frac{s}{2\mu} + \frac{\gamma}{2\chi} \right) (\bar{T}_\phi - \bar{T}_r) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma}{s}$$

$$\bar{T}_r(r_i, s) = -p/s, \quad \bar{T}_r(r_e, s) = 0$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $\bar{T}_r - \bar{T}_\phi$ y \bar{T}_r están dados por:

$$\bar{T}_r - \bar{T}_\phi = -\omega \left[s \left(\frac{\bar{u}}{r} - \frac{d\bar{u}}{dr} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma}{s} \right]$$

$$\bar{T}_r = (K + \frac{2}{3} \omega s) \frac{d\bar{u}}{dr} + (2K - \frac{2}{3} \omega s) \frac{\bar{u}}{r} - \frac{\omega \gamma}{\sqrt{3}s}$$

$$\text{donde } \omega = \frac{2\mu \chi}{s\chi + \mu\gamma}$$

Introduciendo $\bar{T}_r - \bar{T}_\phi$ y \bar{T}_r en la primera ecuación se tiene que:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{2}{r^2} \bar{u} - \frac{\beta}{r} = 0$$

$$\text{donde } \beta = \frac{3\sqrt{3} \gamma \omega}{s(3K + 2\omega s)}$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$\bar{u} = C_1(s) r + C_2(s) r^{-2} + \frac{\beta}{9} r [3 L r - 1]$$

Introduciendo el valor de \bar{u} en el sistema de ecuaciones del dominio transformado se obtienen \bar{T}_r y \bar{T}_ϕ :

$$\bar{T}_r = K(3C_1 + \beta L r) - \frac{2}{3} \omega \left[s(3C_2 r^{-3} - \frac{\beta}{3}) + \frac{\sqrt{3} \gamma}{2s} \right]$$

$$\bar{T}_\phi = K(3C_1 + \beta L r) + \frac{\omega}{3} \left[s(3C_2 r^{-3} - \frac{\beta}{3}) + \frac{\sqrt{3} \gamma}{2s} \right]$$

Las constantes $C_1(s)$ y $C_2(s)$ son determinadas a partir de las condiciones de contorno $\bar{T}_r(r_i) = -p/s$ y $\bar{T}_r(r_e) = 0$;

$$C_1(s) = -\frac{\beta}{3} L r_e + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{p}{3Ks} - \frac{\beta}{3} L \frac{r_e}{r_i} \right] + \frac{1}{9} \beta$$

$$C_2(s) = \frac{r_e^3}{2\omega\alpha s} \left[\frac{p}{s} - K\beta L \frac{r_e}{r_i} \right]$$

Introduciendo $C_1(s)$ y $C_2(s)$ en \bar{u} , \bar{T}_r y \bar{T}_ϕ se arriba a la solución de nuestro problema de valor de contorno en el campo transformado.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{pr}{\alpha s} \left[\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right] + \frac{\sqrt{3}\gamma r}{2\alpha s^2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left[\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right] \\ &- \frac{\beta}{3} \left\{ L \frac{r_e}{r} - \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] \right\} \\ \bar{T}_r &= - \frac{p}{\alpha s} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] - K\beta \left\{ L \frac{r_e}{r} - \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] \right\} \\ \bar{T}_\phi &= \frac{p}{\alpha s} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] - K\beta \left\{ L \frac{r_e}{r} + \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que β puede ser reescrito en la siguiente forma:

$$\beta = \frac{3\sqrt{3} \gamma \omega}{s(3K + 2\omega s)} = \frac{2Y}{K} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + m} \right)$$

donde $m = \frac{3K \mu \gamma}{\chi(3K + 4\mu)}$, $Y = \sqrt{3}\chi$

La transformada inversa de \bar{u} , \bar{T}_r y \bar{T}_ϕ resulta:

$$\begin{aligned} u &= \frac{pr}{\alpha} \left[\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right] + \frac{3\gamma}{4\alpha} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left[\frac{p}{Y} - 2L \frac{r_e}{r_i} \right] rt \\ &- \frac{2\chi}{\sqrt{3}K} \left\{ L \frac{r_e}{r} - \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] \right\} (1 - e^{-mt}) r \end{aligned}$$

$$T_r = -\frac{p}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] - 2Y \left\{ L \frac{r_e}{r} - \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] \right\} (1 - e^{-mt})$$

$$T_\phi = \frac{p}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] - 2Y \left\{ L \frac{r_e}{r} + \frac{1}{\alpha} L \frac{r_e}{r_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] - \frac{1}{2} \right\} (1 - e^{-mt})$$

$$J_2^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\alpha} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - \frac{2Y}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{2\alpha} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 L \frac{r_e}{r_i} - \frac{1}{2} \right] (1 - e^{-mt})$$

La condición de que todo punto de la región pertenezca al dominio viscoplástico $f(T, \chi) > 0$, en todo instante t , se reduce en el ejemplo que estamos analizando, a que la condición $\sqrt{3} J_2^{1/2} = T_\phi - T_r > Y$ se verifique para cualquier par $(r, t) \in [r_i, r_e] \times [0, \infty]$.

De la condición anterior se sigue que p tiene que ser mayor que la presión límite $p^{lp} = 2Y L \frac{r_e}{r_i}$ determinada en el ejemplo I.1.

Los valores de las tensiones T_r , T_ϕ , T_e y la velocidad v obtenidos a partir de la solución exacta del problema de valor de contorno con condición inicial para el caso de una esfera hueca de material elasto/viscoplástico con relación de radios $r_e/r_i = 1.5$, presión interna $p = 2Y$, Módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^4 Y$, Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y diferentes valores de t son presentados en las figuras V 23, 24, 25, 26.

vii) *Viscoplasticidad estacionaria. Ley de HOHENEMSER-PRAGER.*

La solución del problema de viscoplasticidad estacionaria se obtiene haciendo $t \rightarrow \infty$ en la solución del problema elasto/viscoplástico.

Del resultado anterior se sigue que para $t \rightarrow \infty$, T_r , T_ϕ y v resultan:

$$T_r = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^3 - 1 \right] (2Y L \frac{r_e}{r_i} - p) - 2Y L \frac{r_e}{r}$$

$$T_{\phi} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 + 1 \right] \left(p - 2Y L \frac{r_e}{r_i} \right) + Y - 2Y L \frac{r_e}{r}$$

$$v = \dot{u} = \frac{\gamma}{2\sqrt{3}} \left[\frac{3}{\alpha} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left(\frac{p}{2Y} - L \frac{r_e}{r_i} \right) \right]^n r$$

donde $\alpha = \left(\frac{r_e}{r_i} \right)^3 - 1$

Las expresiones anteriores coinciden con las obtenidas en el ejemplo III.1. del capítulo anterior.

La distribución de tensiones T_r , T_{ϕ} , T_e y velocidad v en el espesor de una esfera hueca de material viscoplástico con relación de radios $r_e/r_i = 1.5$ y presión interna $p = 2Y$, obtenidos mediante la solución exacta coinciden con el límite para $t \rightarrow \infty$ de la solución elasto/viscoplástica del mismo problema, figuras V 23, 24, 25, 26.

IV.4. Principio de la Potencia Virtual.

Para obtener el Principio de Mínima Energía Potencial, equivalente al problema de valor de contorno con condición inicial en elasto/viscoplasticidad, partiremos del Principio de la Potencia Virtual formulado para las fuerzas externas \dot{b} , \dot{a} y la tensión \dot{T} .

Antes de enunciar dicho principio, definamos previamente dos campos Kin.v y Var.v.

- i) Kin.v, campo de velocidades cinematicamente admisibles, cuyos elementos son suficientemente regulares, están definidos en todo punto $X \in \Omega$ y satisfacen condiciones de con

torno en Γ_u . A cada elemento de dicho espacio lo notaremos con v^* .

$$\text{Kin.v} = \{ v^* = v^*(X) \text{ suf. regular en} \\ X \in \Omega, v^* = \bar{v} \text{ en } X \in \Gamma_u; \}$$

ii) Var.v , campo de variaciones admisibles de la velocidad, cuyos elementos que notaremos, con \hat{v} , son suficientemente regulares, están definidos en todo $X \in \Omega$ y satisfacen condiciones de contorno homogéneas en Γ_u

$$\text{Var.v} = \{ \hat{v} = \hat{v}(X) \text{ suf. regular en} \\ X \in \Omega, \hat{v} = 0 \text{ en } X \in \Gamma_u; \}$$

Empleando los espacios definidos anteriormente, el Principio de la Potencia Virtual, que establece la igualdad entre la potencia virtual externa e interna puede ser enunciado como el siguiente problema variacional.

Determinar $v \in \text{Kin.v}$, tal que la igualdad:

$$\int_{\Omega} \dot{b} \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \dot{T} \cdot \hat{D} \, d\Omega$$

se verifique para cualquier $\hat{v} \in \text{Var.v}$, con las condiciones subsidiarias:

$$\begin{aligned} D &= (\nabla v)^S && \text{velocidad de deformación cinemáticamente} \\ &&& \text{admisible} \\ \hat{D} &= (\nabla \hat{v})^S && \text{variación de la velocidad de deformación} \\ \dot{T} &= \mathbb{D}(D - D^{vp}) = \mathbb{D} D - \gamma < \phi > \mathbb{D} f_T && \text{velocidad de tensión} \\ &&& \text{cinemáticamente admisible.} \end{aligned}$$

IV.5. Principio de Mínima Energía Potencial.

Mostraremos que la solución de nuestro problema de valor de contorno equivale también a determinar un elemento $v \in \text{Kin.v}$ que minimice el funcional de energía $\pi = \pi(v^*)$.

Observemos previamente que en la expresión de la potencia virtual aparecen variables que pertenecen a Kin.v y Var.v . Por lo tanto será conveniente reducir dicha expresión a variables que pertenecen solamente a Kin.v .

Para ello procederemos a escribir \hat{v} , conocida en mecánica como velocidad virtual, como diferencia de dos elementos de Kin.v . Si uno de ellos coincide con la solución del problema que designamos con v , se tiene:

$$\hat{v} = v^* - v \quad (\hat{v} \in \text{Var.v} ; \quad v^*, \quad v \in \text{Kin.v})$$

De la linealidad de $D = (\nabla v)^S$ es posible obtener una relación similar para \hat{D} .

$$\hat{D} = D^* - D$$

donde: $\hat{D} = (\nabla \hat{v})^S$, $D^* = (\nabla v^*)^S$, $D = (\nabla v)^S$

Substituyendo las relaciones $\hat{v} = v^* - v$ y $\hat{D} = D^* - D$ en la expresión de la potencia virtual, arribamos a una igualdad en que todas las variables están definidas en Kin.v .

$$\int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot (v^* - v) d\Gamma = \int_{\Omega} \dot{T} \cdot (D^* - D) d\Omega$$

donde $\dot{T} = \mathbb{D}(D - D^{VP})$.

Antes de introducir el potencial elasto/viscoplástico

$\Phi()$ dado por la expresión:

$$\Phi(D, D^{VP}) = \frac{1}{2} D \cdot \mathbb{D} D - D \cdot \mathbb{D} D^{VP}$$

que cumple la propiedad $\Phi_D = \mathbb{D}(D - D^{VP}) = \dot{T}$, mostraremos que la siguiente desigualdad se cumple:

$$\Phi^* - \Phi \geq \dot{T} \cdot (D^* - D)$$

verificándose la igualdad si y solamente si $D^* = D$.

Donde $\Phi^* = \Phi(D^*, D^{VP})$, $\Phi = \Phi(D, D^{VP})$ son los valores del potencial $\Phi(.)$ en los puntos (D^*, D^{VP}) y (D, D^{VP}) .

Para ello expresemos $\Phi(D^*, D^{VP})$ mediante el desarrollo de Taylor:

$$\Phi(D^*, D^{VP}) = \Phi(D, D^{VP}) + \Phi_D \cdot (D^* - D) + \frac{1}{2} (D^* - D) \Phi_{DD} (D^* - D) + \dots$$

donde:

$$\Phi_D = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial D} \right|_{(D, D^{VP})} = \mathbb{D}(D - D^{VP}) = \dot{T}$$

$$\Phi_{DD} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D^2} \right|_{(D, D^{VP})} = \mathbb{D}; \quad \Phi_{DDD} = 0$$

En virtud de lo anterior y recordando la notación propuesta, el desarrollo de Taylor toma la forma:

$$\Phi^* = \Phi + \dot{T} \cdot (D^* - D) + \frac{1}{2} (D^* - D) \cdot \mathbb{D}(D^* - D)$$

De la relación anterior y de la positividad de \mathbb{D} a

arribamos a la desigualdad que queríamos mostrar:

$$\Phi^* - \Phi \geq \dot{T} \cdot (D^* - D)$$

en que la igualdad se verifica si y sólo si:

$$D^* - D = 0$$

Introduciendo la desigualdad anterior en la expresión:

$$\int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot (v^* - v) d\Gamma = \int_{\Omega} \dot{T} \cdot (D^* - D) d\Omega$$

se sigue que:

$$\int_{\Omega} \dot{b} \cdot (v^* - v) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot (v^* - v) d\Gamma \leq \int_{\Omega} (\Phi^* - \Phi) d\Omega$$

Verificándose la igualdad si y sólo si:

$$D^* = D \quad \text{en todo punto } X \in \Omega$$

Reagrupando términos en la desigualdad anterior e introduciendo el funcional:

$$\pi(v^*) = \int_{\Omega} \Phi^* d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^* d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot v^* d\Gamma$$

arribamos a la expresión del Principio de Mínima Energía Potencial total:

$$\pi(v) \leq \pi(v^*)$$

Dicho principio puede ser enunciado en la forma siguien

te:

De todas las velocidades cinematicamente admisibles $v^* \in \text{Kin}.v$, aquella que hace mínimo al funcional $\pi(v^*)$ es la solución del problema de valor de contorno propuesto.

IV.5.1. Ecuaciones de EULER y Condiciones Naturales de Contorno del Funcional energía.

Efectuemos la variación del funcional energía $\pi(v)$

$$\hat{\pi} = \frac{\partial \pi}{\partial v} \Big|_{(v)} \cdot \hat{v} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D} \cdot \hat{D} - \dot{b} \cdot \hat{v} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \hat{v} d\Gamma$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial \Phi}{\partial D} = \dot{T}$ y $\hat{D} = (\nabla \hat{v})^S$, de la simetría de \dot{T} se sigue:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D} \cdot \hat{D} = \dot{T} \cdot \nabla \hat{v}$$

Introduciendo la igualdad anterior en π se tiene

$$\hat{\pi} = \int_{\Omega} (\dot{T} \cdot \nabla \hat{v} - \dot{b} \cdot \hat{v}) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \hat{v} d\Gamma$$

Recordando la relación $\dot{T} \cdot \nabla \hat{v} = \text{div}(\dot{T}^T \hat{v}) - \text{div} \dot{T} \cdot \hat{v}$, del teorema de la divergencia se sigue:

$$\int_{\Omega} \dot{T} \cdot \nabla \hat{v} d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}(\dot{T}^T \hat{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \dot{T} \cdot \hat{v} d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma} \dot{T}_n \cdot \hat{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v} \, d\Omega$$

Introduciendo el resultado anterior en la expresión de $\hat{\pi}$ y recordando que $v = 0$ en Γ_u , se obtiene la variación del funcional energía:

$$\hat{\pi} = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b}) \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} (\dot{T}_n - \dot{a}) \cdot \hat{v} \, d\Gamma$$

De la condición de estacionaridad $\hat{\pi} = 0$, se deduce la ecuación de EULER:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y la condición natural de contorno:

$$\dot{T}_n - \dot{a} = 0 \quad \text{en } \Gamma_T$$

IV.6. Principio de la Potencia Virtual Complementaria.

A partir del Principio de la Potencia Virtual Complementaria, mostraremos como arribar al Principio de Mínima Energía Potencial Complementaria equivalente al problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad.

Definiremos previamente dos campos Est.T y Var.T que nos serán de utilidad para enunciar ambos principios.

i) Est. T, campo de tensiones estaticamente admisibles, cuyos

elementos \dot{T}^0 son tensores simétricos que satisfacen las condiciones de equilibrio en Ω y en el contorno Γ_T

$$\text{Est.T} = \{ \dot{T}^0 \in \text{Sym} \ ; \ \text{div } \dot{T}^0 + \dot{b} = 0 \text{ en } \Omega, \ \dot{T}^0 n = \dot{\bar{a}} \text{ en } \Gamma_T \}$$

ii) Var. T, campo de variaciones admisibles de tensión, cuyos elementos $\hat{\dot{T}}$ son tensores simétricos que satisfacen condiciones de equilibrio homogéneas tanto en Ω como en Γ_T .

$$\text{Var.T} = \{ \hat{\dot{T}} \in \text{Sym} \ ; \ \text{div } \hat{\dot{T}} = 0 \text{ en } \Omega, \ \hat{\dot{T}} n = 0 \text{ en } \Gamma_T \}$$

Empleando los espacios definidos anteriormente, el Principio de la Potencia Virtual Complementaria puede ser enunciado como el siguiente problema variacional.

Determinar $\dot{T} \in \text{Est.T}$ tal que verifique la igualdad:

$$\int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}} n \cdot \bar{\dot{v}} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \hat{\dot{T}} : D \, d\Omega$$

para cualquier $\hat{\dot{T}} \in \text{Var.T}$, con la condición subsidiaria:

$$D = D^{-1} \dot{T} + D^{vp} \quad \text{velocidad de deformación estáticamente admisible}$$

Donde $\bar{\dot{v}} = \dot{\bar{u}}$ es la velocidad prescrita en Γ_u .

IV.7. Principio de Mínima Energía Potencial Complementaria.

Mostraremos que la solución en tensiones de nuestro problema de valor de contorno equivale también a determinar un elemento $\dot{T} \in \text{Est. } T$ que minimiza un funcional $\pi_c = \pi_c(\dot{T}^0)$.

Para arribar a dicho funcional, transformaremos previamente la expresión del trabajo virtual complementario, definido para elementos de $\text{Var. } T$ y $\text{Est. } T$ a elementos de $\text{Est. } T$.

\hat{T} , denominada en mecánica, tensión virtual, puede ser expresada como la diferencia de dos elementos de $\text{Est. } T$, si uno de ellos, que denominaremos \dot{T} coincide con la solución del problema, se tiene:

$$\hat{T} = \dot{T}^0 - \dot{T} \quad (\hat{T} \in \text{Var. } T ; \dot{T}^0, \dot{T} \in \text{Est. } T)$$

Introduciendo la relación anterior en la expresión del trabajo virtual complementario se sigue:

$$\int_{\Gamma_u} (\dot{T}^0 - \dot{T}) n \cdot \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\dot{T}^0 - \dot{T}) : D \, d\Omega$$

Dado el potencial elasto/viscoplástico $\Phi(D, D^{vp})$, mediante la transformación de Legendre, se determinó otra función escalar de variable tensorial $\psi(\dot{T}, D^{vp})$, que cumple con la anterior la siguiente relación:

$$\psi(\dot{T}, D^{vp}) + \Phi(D, D^{vp}) = \dot{T} : D$$

y cuya derivada verifica:

$$\psi_{\dot{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{T}} \bigg|_{(\dot{T}, D^{vp})} = D$$

En nuestro caso la función $\psi(\dot{T}, D^{vp})$ y su derivada es tán dadas por:

$$\psi(\dot{T}, D^{vp}) = \frac{1}{2} \dot{T} \cdot \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + \dot{T} \cdot D^{vp}$$

$$\psi_{\dot{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{T}} \Big|_{(\dot{T}, D^{vp})} = \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + D^{vp} = D$$

Designando con ψ^0 y ψ a los valores que asume la función $\psi(\cdot)$, denominada también energía de deformación complementaria, en los puntos (\dot{T}^0, D^{vp}) y (\dot{T}, D^{vp}) , es posible mostrar a sí como lo hicimos para ϕ , que:

$$\psi^0 - \psi \geq D \cdot (\dot{T}^0 - \dot{T})$$

Verificándose la igualdad si y solamente si

$$\dot{T}^0 = \dot{T}$$

Introduciendo la desigualdad anterior en la expresión que habíamos arribado.

$$\int_{\Gamma_u} (\dot{T}^0 - \dot{T}) n \cdot \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\dot{T}^0 - \dot{T}) \cdot D \, d\Omega$$

Se obtiene la desigualdad:

$$\int_{\Gamma_u} (\dot{T}^0 - \dot{T}) n \cdot \bar{v} \, d\Gamma \leq \int_{\Omega} (\psi^0 - \psi) \, d\Omega$$

Verificándose la igualdad si y sólo si:

$$\dot{T}^0 = \dot{T} \quad \text{en todo punto} \quad X \in \Omega$$

Reagrupando términos en la desigualdad anterior e introduciendo el funcional:

$$\pi_c(\dot{T}^0) = \int_{\Omega} \Psi^0 d\Omega - \int_{\Gamma_u} \dot{T}^0 n \cdot \bar{v} d\Gamma$$

se arriba a la expresión del Principio de Mínima Energía Potencial Complementaria

$$\pi_c(\dot{T}) \leq \pi_c(\dot{T}^0)$$

Dicho principio puede ser enunciado de la manera siguiente:

De todos los estados de tensión estaticamente admisibles $\dot{T}^0 \in \text{Est. } T$, el que hace mínimo al funcional $\pi_c(\dot{T})$, es la solución en tensiones del problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad.

IV.7.1. Ecuación de Euler y condición natural de contorno del funcional energía complementaria.

Efectuamos la variación del funcional π_c en el punto \dot{T} y en la dirección $\hat{\dot{T}}$.

$$\hat{\pi}_c = \left. \frac{\partial \pi_c}{\partial \dot{T}} \right|_{(T)} \cdot \hat{\dot{T}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} \cdot \hat{\dot{T}} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}} n \cdot \bar{v} d\Gamma$$

Mostraremos previamente que la siguiente igualdad se verifica:

$$\int_{\Gamma} \hat{\dot{T}}_n \cdot v \, d\Gamma = \int_{\Omega} \hat{\dot{T}} \cdot (\nabla v)^S \, d\Omega$$

Para ello apliquemos el Teorema de la Divergencia al primer miembro de la igualdad anterior, tengamos en cuenta la relación:

$$\operatorname{div} (\hat{\dot{T}}^T v) = \operatorname{div} \hat{\dot{T}} \cdot v + \hat{\dot{T}} \cdot \nabla v$$

y recordemos además que por definición de $\operatorname{Var.} T$, se cumple que:

$$\operatorname{div} \hat{\dot{T}} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

De lo anterior se sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \hat{\dot{T}}_n \cdot v \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \hat{\dot{T}}^T v \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} (\hat{\dot{T}}^T v) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\dot{T}} \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\dot{T}} \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\dot{T}} \cdot (\nabla v)^S \, d\Omega \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la proposición anterior.

Sumando y restando, a la expresión de $\hat{\pi}_c$, las integrales que mostramos ser iguales, se tiene:

$$\hat{\pi}_c = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\dot{T}}} \cdot \hat{\dot{T}} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla v)^S \cdot \hat{\dot{T}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\dot{T}}_n \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}}_n \cdot \bar{v} \, d\Gamma$$

Recordando que $\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\dot{T}}} = D$ y que de la definición de $\operatorname{Var.} T$; $\hat{\dot{T}}_n = 0$ en Γ_T , $\hat{\pi}_c$ puede ser reescrita como:

$$\pi_c = \int_{\Omega} [D - (\nabla v)^S] \cdot \hat{\dot{T}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}}_n \cdot (v - \bar{v}) \, d\Gamma$$

De la condición de estacionaridad $\hat{\pi}_c = 0$ se deduce la ecuación de Euler

$$D - (\nabla v)^S = 0 \quad \text{en } \Omega$$

y la condición de contorno

$$v - \bar{v} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u$$

IV.8. Funcional de Tres Campos.

Mostraremos a seguir como formular el funcional de tres campos $\pi_1(\dot{T}, D, v)$ cuyas ecuaciones de Euler y condiciones naturales coinciden con las ecuaciones y condiciones de contorno de nuestro problema.

Partiremos del funcional de energía ya deducido

$$\pi(v) = \int_{\Omega} \Phi(D, D^{VP}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot v \, d\Gamma$$

En el introduciremos las condiciones subsidiarias

$$D = (\nabla v)^S \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad v = \bar{v} \quad \text{en } \Gamma_u$$

con lo que se obtiene un nuevo funcional que designaremos con $\pi_1(\dot{T}, D, v)$:

$$\pi_1(\dot{T}, D, v) = \pi(v) - \int_{\Omega} \dot{T} \cdot [D - (\nabla v)^S] \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) \cdot \dot{T} n \, d\Gamma =$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \Phi(D, D^{VP}) - \dot{T} \cdot [D - (v)^S] - \dot{b} \cdot v \right\} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) \cdot \dot{T}n \, d\Gamma$$

IV.8.1. Ecuaciones de Euler y condiciones naturales de contorno del funcional de tres campos.

Efectuemos la variación del funcional π_1 en el punto (\dot{T}, D, v) y en las direcciones $\hat{T}, \hat{D}, \hat{v}$.

$$\hat{\pi}_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial \dot{T}} \bigg|_{(\dot{T}, D, v)} \cdot \hat{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial D} \bigg|_{(\dot{T}, D, v)} \cdot \hat{D} + \frac{\partial \pi_1}{\partial v} \bigg|_{(\dot{T}, D, v)} \cdot \hat{v} \\ \hat{\pi}_1 = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial D} \bigg|_{(D)} \cdot \hat{D} - \dot{T} \cdot [D - (\nabla v)^S] - \dot{T} \cdot \hat{D} + \right. \\ \left. + \dot{T} \cdot (\nabla \hat{v})^S - \dot{b} \cdot v \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(v - \bar{v}) \cdot \dot{T}n + \hat{v} \cdot Tn] \, d\Gamma$$

Recordando que la siguiente relación se verifica:

$$\dot{T} \cdot (\nabla \hat{v})^S = \dot{T} \cdot \nabla \hat{v} = \operatorname{div} (\dot{T}^T \hat{v}) - \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v}$$

del teorema de la divergencia se sigue:

$$\int_{\Omega} \dot{T} \cdot (\nabla \hat{v})^S \, d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{v} \cdot \dot{T}n \, d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v} \, d\Omega$$

Introduciendo la relación anterior en $\hat{\pi}_1$, y reagrupando términos, se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1 = \int_{\Omega} \left\{ (\Phi_D - \dot{T}) \cdot \hat{D} - [D - (\nabla v)^S] \cdot \hat{T} - (\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b}) \cdot \hat{v} \right\} d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_T} (\dot{\bar{a}} - \dot{T}n) \cdot \hat{v} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) \cdot \hat{T}n d\Gamma \end{aligned}$$

De la condición de estacionaridad $\hat{\pi}_1 = 0$ se deducen las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} &= 0 \\ D - (\nabla v)^S &= 0 \\ \Phi_D - \dot{T} &= 0 \quad \text{en } \Omega \end{aligned}$$

y las condiciones naturales de contorno

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} - \dot{T}n &= 0 \quad \text{en } \Gamma_T \\ v - \bar{v} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_u \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que las ecuaciones de Euler y las condiciones naturales de contorno del funcional π_1 coinciden con las ecuaciones y condiciones de contorno de nuestro problema.

IV.9. Funcional de dos Campos de HELLINGER-REISSNER.

Mostraremos a seguir como formular el funcional de dos campos $\pi_{HR}(\dot{T}, v)$ a partir del funcional energía complementaria π_C ya deducido:

$$\pi_c(\dot{T}) = \int_{\Omega} \Psi(\dot{T}, D^{VP}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \dot{T}n \cdot \bar{v} d\Gamma$$

donde: $\Psi(\dot{T}, D^{VP}) = \frac{1}{2} \dot{T} \cdot D^{-1} \dot{T} + \dot{T} \cdot D^{VP}$

Para ello introduzcamos las condiciones subsidiarias:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \dot{T}n = \dot{\bar{a}} \quad \text{en } \Gamma_T$$

en π_c , con lo que se obtiene un nuevo funcional de dos campos:

$$\begin{aligned} \pi_{HR}(\dot{T}, v) &= \pi_c(\dot{T}) + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b}) \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_T} (\dot{\bar{a}} - \dot{T}n) \cdot v d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \Psi(\dot{T}, D^{VP}) d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{T}n \cdot \bar{v} d\Gamma + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b}) \cdot v d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Gamma_T} (\dot{\bar{a}} - \dot{T}n) \cdot v d\Gamma \end{aligned}$$

De la igualdad: $\operatorname{div} \dot{T} \cdot v = \operatorname{div} (\dot{T}^T v) - \dot{T} \cdot \nabla v$ y del teorema de la divergencia se sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{T} \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (\dot{T}^T v) d\Omega - \int_{\Omega} \dot{T} \cdot \nabla v d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \dot{T}n \cdot v d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{T} \cdot \nabla v d\Omega \end{aligned}$$

Introduciendo esta relación en π_{HR} , obtenemos la si guiente expresión para el funcional de dos campos de HELLINGER-REISSNER.

$$\pi_{HR}(\dot{T}, v) = \int_{\Omega} \Psi(\dot{T}, D^{VP}) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega} \dot{T} \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \dot{T} n \cdot (v - \bar{v}) \, d\Gamma$$

Nótese que también es posible arribar al funcional de HELLINGER-REISSNER partiendo del funcional de tres campos:

$$\begin{aligned} \pi_1(\dot{T}, D, v) = & \int_{\Omega} [\Phi(D, D^{VP}) - \dot{T} \cdot (D - \nabla v) - \dot{b} \cdot v] \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) \cdot \dot{T} n \, d\Gamma \end{aligned}$$

Recordando la relación entre la función energía y función energía complementaria dada por la transformación de Legendre:

$$\Phi(D, D^{VP}) = - \Psi(\dot{T}, D^{VP}) + \dot{T} \cdot D$$

Introduciendo esta relación en la expresión de π_1 se obtiene el funcional de HELLINGER-REISSNER:

$$\begin{aligned} \pi_{HR}(\dot{T}, v) = & \int_{\Omega} [-\Psi(\dot{T}, D^{VP}) - \dot{b} \cdot v + \dot{T} \cdot \nabla v] \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (v - \bar{v}) \cdot \dot{T} n \, d\Gamma \end{aligned}$$

IV.7.1. Ecuaciones de Euler y Condiciones naturales de contorno del funcional de HELLINGER-REISSNER.

Efectuemos la variación del funcional $\pi_{HR}(\dot{T}, v)$

$$\hat{\pi}_{HR} = \frac{\partial \pi_{HR}}{\partial \dot{T}} \bigg|_{(\dot{T}, \dot{v})} \cdot \dot{T} + \frac{\partial \pi_{HR}}{\partial \dot{v}} \bigg|_{(\dot{T}, \dot{v})} \cdot \dot{v}$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{HR} = & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} \cdot \dot{T} + \dot{b} \cdot \hat{v} - \dot{T} \cdot \nabla v - \dot{T} \cdot \nabla \hat{v} \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \hat{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [\dot{T}n \cdot (v - \bar{v}) + \dot{T}n \cdot \hat{v}] d\Gamma \end{aligned}$$

De la relación $-\dot{T} \cdot \nabla \hat{v} = \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v} - \operatorname{div} (\dot{T}^T \hat{v})$ y del teorema de la divergencia, se tiene:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \dot{T} \cdot \nabla \hat{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\dot{T}^T \hat{v}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{T} \cdot \hat{v} d\Omega - \int_{\Gamma} \dot{T}n \cdot \hat{v} d\Gamma \end{aligned}$$

Introduciendo la relación anterior en la expresión de $\hat{\pi}_{HR}$ y agrupando términos obtendremos la variación del funcional de dos campos:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{HR}(\dot{T}, \dot{v}) = & \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} - \nabla v \right) \cdot \dot{T} + (\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b}) \cdot \hat{v} \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_T} (\dot{a} - \dot{T}n) \cdot \hat{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \dot{T}n \cdot (v - \bar{v}) d\Gamma \end{aligned}$$

De la condición de estacionaridad $\hat{\pi}_{HR} = 0$ se deducen las

ecuaciones de Euler:

$$\operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} = 0$$

$$\dot{\Psi}_T - (\nabla v)^S = 0 \text{ en } \Omega$$

y las condiciones naturales de contorno:

$$\dot{\bar{a}} - Tn = 0 \quad \text{en } \Gamma_T$$

$$v - \bar{v} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u$$

CAPITULO V

SOLUCIONES APROXIMADAS EN ELASTO/VISCOPLASTICIDAD

El gran desarrollo industrial y tecnológico de las últimas décadas, ha intensificado extensivamente las investigaciones sobre el comportamiento inelástico de los materiales.

Desafortunadamente y tal como fue observado en capítulos anteriores, soluciones exactas en problemas de inelasticidad son posibles solamente en un escaso número de ejemplos simples y siempre que se emplee determinada ley inelástica particular.

La dificultad anterior ha contribuido para que en los últimos años la casi totalidad de los problemas en inelasticidad haya sido abordada mediante métodos aproximados. Entre estos métodos, uno de los más explorados ha sido el de emplear formulaciones variacionales conjuntamente con el Método de Elementos Finitos ⁵³.

Por tal razón, las investigaciones en esta área se han centrado en dos aspectos fundamentales. Uno de ellos se refiere a la obtención de modelos mecánicos y leyes constitutivas que representen el comportamiento real de los materiales para diversos tipos de sollicitación. El otro aspecto consiste en desarrollar el estudio de principios variacionales y sus correspondientes aproximaciones numéricas que permitan obtener soluciones en problemas donde tales materiales son empleados.

Dentro de los modelos inelásticos, el elasto/viscoplástico presenta la ventaja de permitir tratar como casos particulares elastoplasticidad, elasto creep, creep secundario y viscoplasticidad. Por tal motivo, centramos nuestra atención

en este capítulo en la aproximación de los principios variacionales en elasto/viscoplasticidad. Mostramos como aproximar espacialmente las variaciones de los funcionales de energía y de Hellinger-Reissner y como obtener el sistema de ecuaciones equivalentes a la condición de mínimo o de estacionaridad de ambos funcionales.

Presentamos también un algoritmo numérico para problemas en elasto/viscoplasticidad basado en la técnica de Elementos Finitos, para la aproximación espacial y el Método de Euler para la integración en el tiempo. Posteriormente particularizamos este algoritmo para tratar problemas de elastoplasticidad y creep secundario.

Finalmente mostramos las soluciones aproximadas obtenidas con estos algoritmos comparándolas con las soluciones exactas de los problemas analizados en capítulos anteriores.

V.1. Aproximación espacial por el Método de Elementos Finitos del problema variacional en elasto/viscoplasticidad.

Los problemas variacionales presentados en el capítulo anterior están definidos en espacios Kin y Var de dimensión infinita. Para la obtención de soluciones aproximadas de estos problemas, procedemos a definirlos en espacios Kin^a y Var^a de dimensión finita.

La construcción de estos espacios de aproximación deberá realizarse de manera que las restricciones impuestas, cuando la definición de Kin y Var , sean también satisfechas en Kin^a y Var^a .

Una de las maneras para lograr lo anterior consiste en suponer que los campos incógnitas pueden expresarse como productos de funciones en X por funciones en t . Teniendo esto presente, los campos v , \hat{v} , \dot{T} y \hat{T} pueden aproximarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v^a &= \psi_\alpha(X) v^\alpha(t) + \bar{v} \quad , \quad \hat{v}^a = \psi_\alpha(X) \hat{v}^\alpha \\ \dot{T}^a &= \Delta_\ell(X) \dot{T}^\ell(t) + \bar{T} \quad , \quad \hat{T}^a = \Delta_\ell(X) \hat{T}^\ell \end{aligned}$$

donde en las expresiones anteriores, se ha adoptado la convención de índices repetidos para indicar sumatoria y

$\psi_\alpha(X)$, $\alpha = 1, 2 \dots, N$ son vectores de aproximación (funciones de X) correspondientes a los campos v y \hat{v} tales que, $\psi_\alpha(X) = 0$ para todo $X \in \Gamma_u$.

$\Delta_\ell(X)$, $\ell = 1, 2 \dots, M$ son tensores de aproximación (funciones de X) correspondientes a los campos \dot{T} y \hat{T} , tales que $n = 0$ $X \in \Gamma_T$.

$v^\alpha(t)$, $\dot{T}^\ell(t)$ funciones escalares del tiempo, cuyos valores para cada t serán determinados a partir de los problemas variacionales propuestos.

\hat{v}^α , \hat{T}^ℓ campos escalares arbitrarios.

$\bar{v} = \bar{v}(X, t)$ campo vectorial tal que para cada instante de tiempo t y para todo $X \in \Gamma_u$, \bar{v} toma los valores prescriptos sobre el campo v .

$\bar{T} = \bar{T}(X, t)$ campo tensorial que para cada t y para $X \in \Gamma_T$ toma los valores prescrip tos sobre el campo T .

De las aproximaciones anteriores y de la definición de D y \hat{D} se obtiene:

$$D^a = (\nabla v^a)^S = (\nabla \psi_\alpha v^\alpha + \bar{\nabla} \bar{v})^S$$

$$\hat{D}^a = (\nabla \hat{v}^a)^S = (\nabla \psi_\alpha \hat{v}^\alpha)^S$$

Ahora bien, las funciones de aproximación $v^a, \dot{T}^a, \hat{v}^a$ y \hat{T}^a pueden construirse en forma sistemática mediante el Método de Elementos Finitos^{54, 55}. Como es conocido, dicho método consiste en particionar la región Ω en subregiones llamadas elementos y aproximar, independientemente en cada uno de ellos, las funciones candidatas v^a y \dot{T}^a . En este caso los coeficientes v^α y \dot{T}^ℓ tienen sentido físico, pues son las componentes de los campos v y \dot{T} en los nudos puestos en evidencia cuando la partición de Ω .

Por otro lado, en el MEF los campos de aproximación ψ_α y Δ_ℓ son obtenidos a través de la composición de los respectivos campos de aproximación a nivel de cada elemento. Los campos ψ_α y Δ_ℓ son tales que las únicas componentes no nulas corresponden, respectivamente, a las componentes que v^α y \dot{T}^ℓ representan.

V.2. Aproximación espacial del funcional de energía y del Principio de la Potencia Virtual.

En el capítulo IV, fue puesta en evidencia la equi-

valencia entre el problema de valor de contorno en elasto/visco plasticidad y el problema variacional de determinar el campo v que minimice el funcional de energía π .

Con las aproximaciones propuestas en la sección anterior, el Principio de Mínima Energía Potencial, queda ahora de finido de la siguiente manera.

Determinar $v^a \in \text{Kin}^a$ tal que el funcional energía π^a :

$$\pi^a = \int_{\Omega} \Phi(D^a) d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot v^a d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v^a d\Gamma$$

alcance un mínimo absoluto.

Con la condición subsidiaria $D^a = (\nabla \psi_{\alpha} v^{\alpha} + \nabla \bar{v})^s$ y donde el espacio Kin^a está dado por:

$$\text{Kin}^a = \left\{ v^a ; v^a = \psi_{\alpha} v^{\alpha} + \bar{v}, v^a|_{\Gamma_u} = \bar{v} \right\}$$

También vimos que bajo ciertas restricciones, el problema de mínimo del funcional energía resulta equivalente al Principio de la Potencia Virtual. En nuestro caso, dicho principio queda aproximado por el siguiente problema variacional.

Determinar $v^a \in \text{Kin}^a$ tal que:

$$\hat{\pi}^a = \int_{\Omega} \mathbb{D} (D - D^{VP})^a \cdot \hat{D}^a d\Omega - \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \hat{v}^a d\Omega - \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot \hat{v}^a d\Gamma = 0$$

para todo $\hat{v}^a \in \text{Var}^a$ y donde el espacio Var^a está definido por:

$$\text{Var}^a = \left\{ \hat{v}^a ; \hat{v}^a = \psi_{\alpha} \hat{v}^{\alpha} \right\}$$

De la aproximación adoptada, el problema $\hat{\pi}^a = 0$ para todo $\hat{v}^a \in \text{Var}^a$, equivalente a $\hat{\pi}^a = 0$ para todo $\hat{v}^{\beta} (\beta = 1, 2, \dots, N)$,

conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable tiempo:

$$K_{\beta\alpha} v^\alpha - H_\beta^{vp} = \dot{F}_\beta^1 - \dot{F}_\beta^2$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{\beta\alpha} &= \int_{\Omega} \mathbb{D} \nabla \psi_\alpha^s \cdot \nabla \psi_\alpha^s \, d\Omega \\ H_\beta^{vp} &= \int_{\Omega} \mathbb{D} D^{vp} \cdot \nabla \psi_\beta^s \, d\Omega \quad , \quad D^{vp} = \gamma < \phi \left(\frac{f}{f_0} \right) > f_T \\ \dot{F}_\beta^1 &= \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \psi_\beta \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot \psi_\beta \, d\Gamma \\ \dot{F}_\beta^2 &= \int_{\Omega} \mathbb{D} \nabla \bar{v}^s \cdot \nabla \psi_\beta^s \, d\Omega \end{aligned}$$

V.3. Aproximación espacial del funcional de HELLINGER-REISSNER.

El funcional de dos campos de HELLINGER-REISSNER π_{HR} fue obtenido en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \pi_{HR}(\dot{T}, v) &= \int_{\Omega} \left[\Psi(\dot{T}) + \dot{b} \cdot v - \dot{T} \cdot \nabla v \right] d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot v \, d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_u} \dot{T} n \cdot (v - \bar{v}) \, d\Gamma \end{aligned}$$

así como también su primera variación $\hat{\pi}_{HR}$

$$\hat{\pi}_{HR} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} \cdot \hat{\dot{T}} + \dot{b} \cdot \hat{v} - \hat{\dot{T}} \cdot \nabla v - \dot{T} \cdot \nabla \hat{v} \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_T} \bar{\dot{a}} \cdot \hat{\dot{v}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}} n \cdot (v - \bar{v}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \dot{\hat{T}} n \cdot \hat{\dot{v}} \, d\Gamma$$

Recordando que $\Psi(\dot{T})$ está dado por:

$$\Psi(\dot{T}) = \frac{1}{2} \dot{T} \cdot \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + \dot{T} \cdot D^{VP}$$

la derivada de Ψ resulta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}} = \mathbb{D}^{-1} \dot{T} + D^{VP}$$

Introduciendo el valor de $\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{T}}$ en la expresión de $\hat{\pi}_{HR}$

y agrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{HR} = & \int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1} \dot{T} + D^{VP} - \nabla v) \cdot \hat{\dot{T}} \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_u} \hat{\dot{T}} (v - \bar{v}) \cdot n \, d\Gamma + \int_{\Omega} (\dot{\hat{b}} \cdot \hat{\dot{v}} - \dot{\hat{T}} \cdot \nabla \hat{\dot{v}}) \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_T} \bar{\dot{a}} \cdot \hat{\dot{v}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \dot{\hat{T}} \cdot \hat{\dot{v}} \cdot n \, d\Gamma \end{aligned}$$

También, en el capítulo anterior fue puesta en evidencia la equivalencia entre el problema de valor de contorno en elasto/viscoplasticidad y el problema variacional que consiste en determinar v y \dot{T} que hagan estacionario al funcional π_{HR} , o lo que es lo mismo, determinar v y \dot{T} tales que verifiquen $\hat{\pi}_{HR} = 0$ para cualquier $\hat{\dot{v}}$ y $\hat{\dot{T}}$.

Debemos observar que en este caso los campos v y \dot{T} no deben satisfacer ninguna condición en la frontera Γ_u y Γ_T res

pectivamente.

Lo anterior implica que Kin coincide con Var y sus aproximantes en este caso están definidos por:

$$\begin{aligned} Kin^a &= \left\{ (v^a, \dot{T}^a) \quad ; \quad v^a = \psi_\alpha v^\alpha, \quad \dot{T}^a = \Delta_\ell \dot{T}^\ell \right\} \\ Var^a &= \left\{ (\hat{v}^a, \hat{\dot{T}}^a) \quad ; \quad \hat{v}^a = \psi_\alpha \hat{v}^\alpha, \quad \hat{\dot{T}}^a = \Delta_\ell \hat{\dot{T}}^\ell \right\} \end{aligned}$$

Introduciendo estas aproximaciones en $\hat{\pi}_{HR}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{HR}^a &= \int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1} \Delta_\ell \dot{T}^\ell + D^{VP} - \nabla \psi_\alpha v^\alpha) \cdot \Delta_k \hat{\dot{T}}^k d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_u} \Delta_k \hat{\dot{T}}^k n \cdot (\psi_\alpha v^\alpha - \bar{v}) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} (\dot{b} \cdot \psi_\beta \hat{v}^\beta - \Delta_\ell \dot{T}^\ell \cdot \nabla \psi_\beta \hat{v}^\beta) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot \psi_\beta \hat{v}^\beta d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \Delta_\ell \dot{T}^\ell n \cdot \psi_\beta \hat{v}^\beta d\Gamma \end{aligned}$$

Reagrupando términos la expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{HR}^a &= \left[\left(\int_{\Omega} \mathbb{D}^{-1} \Delta_\ell \cdot \Delta_k d\Omega \right) \dot{T}^\ell + \left(\int_{\Omega} D^{VP} \cdot \Delta_k d\Omega \right) - \right. \\ &- \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_\alpha \cdot \Delta_k d\Omega \right) v^\alpha + \left(\int_{\Gamma_u} \Delta_k n \cdot \psi_\alpha d\Gamma \right) v^\alpha - \\ &- \left. \left(\int_{\Gamma_u} \Delta_k n \cdot \bar{v} d\Gamma \right) \right] \hat{\dot{T}}^k + \\ &+ \left[\left(\int_{\Omega} \dot{b} \cdot \psi_\beta d\Omega - \left(\int_{\Omega} \Delta_\ell \cdot \nabla \psi_\beta d\Omega \right) \dot{T}^\ell + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot \psi_\beta d\Gamma \right) + \left(\int_{\Gamma_u} \Delta_\ell n \cdot \psi_\beta d\Gamma \right) \dot{T}^\ell \right] \hat{v}^\beta \end{aligned}$$

La condición $\hat{\pi}_{HR} = 0$ para todo \hat{v}, \hat{T} en este caso resulta:

$$\hat{\pi}_{HR}^a = 0 \quad \text{para todo } \hat{v}^\beta, \hat{T}^k \quad (\beta=1, \dots, N), (k=1, \dots, M)$$

Lo anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo:

$$\begin{cases} K_{k\ell} \dot{T}^\ell + M_{k\alpha} v^\alpha = \dot{F}_k^1 + \dot{F}_k^{vp} \\ M_{\alpha k} \dot{T}^k = \dot{F}_\alpha^2 \end{cases}$$

donde:

$$K_{k\ell} = \int_{\Omega} (\mathbb{D}^{-1} \Delta_\ell \cdot \Delta_k) d\Omega$$

$$M_{k\alpha} = \int_{\Gamma_u} \Delta_k^{n \cdot} \psi_\alpha d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \psi_\alpha \cdot \Delta_k d\Omega$$

$$\dot{F}_k^1 = \int_{\Gamma_u} \Delta_k^{n \cdot} \bar{v} d\Gamma$$

$$\dot{F}_k^{vp} = - \int_{\Omega} D^{vp} \cdot \Delta_k d\Omega$$

$$\dot{F}_\alpha^2 = - \left(\int_{\Gamma_T} \dot{\bar{a}} \cdot \psi_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \dot{b} \cdot \psi_\alpha d\Gamma \right)$$

V.4. Aproximación en el tiempo.

Con la aproximación espacial obtenida mediante el Método de Elementos Finitos, los problemas variacionales en elasto/viscoplasticidad se redujeron a un sistema de ecuaciones di

ferenciales ordinarias en el tiempo.

La integración numérica de este sistema puede realizarse por algunos de los métodos clásicos ya existentes tales como Método de Euler, Métodos de Runge-Kutta, etc. A efectos de simplificar la presentación en esta sección, limitaremos la misma al Método Euler aplicado al Principio de la Potencia Virtual. Esta misma formulación puede ser extendida al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias provenientes del funcional de Hellinger-Reissner.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a que habíamos arribado es el siguiente:

$$\begin{aligned} D^{VP} &= \gamma < \phi\left(\frac{f}{F_0}\right) > f_T \\ K_V &= \dot{F} + H^{VP} \\ D &= (\nabla \psi_\alpha v^\alpha + \nabla \bar{v})^s \\ \dot{T} &= D(D - D^{VP}) \\ \dot{\chi} &= \chi \left(\int_0^t T \cdot D^{VP} dt \right) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(X,0) &= u_0, \quad E(X,0) = E_0, \quad E^{VP}(X,0) = 0, \quad T(X,0) = T_0 \\ \chi(X,0) &= \chi_0 \end{aligned}$$

asociadas a la solución del problema elástico en el instante $t = 0$.

Podemos observar que si en un instante t son conocidos los campos u, E, E^{VP}, T, χ , mediante el sistema anterior se determinan D^{VP}, V, D, \dot{T} y $\dot{\chi}$. La secuencia de cálculo para lograr

esto, es la siguiente:

1. Se determina el tensor D^{vp} en el instante t a través de:

$$D^{vp} = \gamma < \phi\left(\frac{f}{f_0}\right) > f_T$$

ya que f y f_T son funciones de T y χ conocidas.

2. Con el valor de D^{vp} se determina el vector H^{vp} y posteriormente se calcula el campo de velocidades v mediante la resolución del sistema:

$$Kv = \dot{F} + H^{vp}$$

3. Conocido v es posible definir el campo de velocidad de deformación D por:

$$D = (\nabla \psi_{\alpha} v^{\alpha} + \overline{\nabla v})^s$$

4. Lo anterior hace posible el cálculo de \dot{T} :

$$\dot{T} = \mathbb{D}(D - D^{vp})$$

5. La tasa de variación del coeficiente χ en el instante t estará dada por:

$$\dot{\chi} = \chi' T.D^{vp}$$

6. Con estos elementos podemos definir el estado, en que se encuentra el sólido, en el instante $t' = t + \Delta t$ por:

$$E(t') = E + \Delta t D$$

$$E^{vp}(t') = E^{vp} + \Delta t D^{vp}$$

$$u(t') = u + \Delta t v$$

$$T(t') = T + \Delta t \dot{T}$$

$$\chi(t') = \chi + \Delta t \dot{\chi}$$

Conocido este nuevo estado se procede a repetir los pasos 1 a 5 a efectos de calcular el estado siguiente.

Finalmente, debemos observar que fue este el algoritmo numérico empleado en la resolución de los problemas de aplicación presentados más adelante.

V.5. Algoritmo numérico en elastoplasticidad.

Tal como fue observado en el capítulo IV, las ecuaciones constitutivas de elasto/viscoplasticidad permiten en el límite ($\chi \neq 0$, $\gamma \rightarrow \infty$) obtener el correspondiente modelo plástico.

De lo anterior se sigue que el algoritmo propuesto para resolver problemas en elasto/viscoplasticidad puede ser empleado para analizar modelos elastoplásticos. Nótese la importancia que tiene este hecho desde el punto de vista computacional. En efecto, un mismo programa de cálculo automático puede así, resolver problemas tanto viscoplásticos como plásticos con sólo una adecuada selección de los parámetros de la ecuación constitutiva.

A continuación describiremos el algoritmo numérico para elastoplasticidad. Aquí debemos notar que el tiempo t pasa a ser un parámetro que define solamente la secuencia de los eventos.

Al igual que en elasto/viscoplasticidad, admitiremos conocido el estado (u, E, E^p, T) en que se encuentra nuestro cuerpo en el instante t_n . Por simplicidad designaremos ese esta-

do con (u_n, E_n, E_n^p, T_n) .

Para determinar la respuesta para el nivel de carga (b_{n+1}, a_{n+1}) y desplazamiento prescrito \bar{u}_{n+1} se procede de la siguiente forma.

1. Se determina, llevando en cuenta el estado n (residuo del término independiente), la respuesta elástica correspondiente al incremento de carga al pasar del nivel de carga n al $n+1$.
2. El estado tensional resultante, permite distinguir en el cuerpo regiones donde $f \leq 0$ y $f > 0$. En esta última, la ecuación constitutiva elasto/viscoplástica (con γ suficientemente grande, ϕ y f adecuados al modelo plástico que se desea analizar) permite definir una velocidad de deformación D^{vp} . A continuación procedemos a aplicar el proceso numérico 1.-5. (presentado en el caso de elasto/viscoplasticidad) hasta que $D^{vp} = 0$ en toda la región Ω del sólido.

Desde el punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento hasta que, por ejemplo, el módulo del vector de fuerzas asociado a las deformaciones viscoplásticas sea suficientemente pequeño comparado con el módulo del vector incremento de carga.

Observemos que alcanzada la convergencia ($D^{vp}=0$) tendremos un estado tensional que satisface en todo punto del sólido la condición $f \leq 0$.

3. Para analizar la respuesta en el nivel $n+2$ se repite 1.-2.

Aquí debemos notar que el algoritmo anterior es igualmente útil en la determinación de carga de colapso, por fluencia plástica, en el caso de estructuras de materiales idealmen-

te plásticos.

V.6. Algoritmo numérico en Creep Secundario.

Nuevamente, recordemos que el modelo elasto/viscoplástico con $\chi = 0$ permite analizar problemas de creep secundario.

Dado que en creep secundario $\dot{b} \equiv \dot{a} \equiv 0$, el funcional $\hat{\pi}^a$ se reduce a:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D} (D - D^C)^a \cdot \hat{D}^a d\Omega = 0$$

ya que para $\chi = 0$ $D^{vp} \equiv D^C$.

El algoritmo numérico para creep secundario es idéntico al algoritmo 1.-5 de elasto/viscoplasticidad. El proceso se repite hasta que el estado tensional y de velocidad de deformación sean estacionarios.

Desde el punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento numérico hasta que la norma de la diferencia entre el vector término independiente en el instante $n+1$ y el vector término independiente en el instante n sea suficientemente pequeña. Es decir, hasta que:

$$\left\{ \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^N \left[\mathbb{D} (D_{n+1}^C - D_n^C)^a \cdot (\nabla \psi_{\alpha})^s \right]^2 d\Omega \right\}^{1/2} < \epsilon$$

donde

$\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

V.7. Aplicaciones numéricas.

En esta sección vamos a presentar las soluciones a aproximadas, obtenidas con el algoritmo elasto/viscoplástico ya analizado (Párrafo V.3 a V.6) de los problemas cuyas soluciones exactas fueron determinadas en capítulos anteriores.

Las soluciones aproximadas para elastoplasticidad y creep secundario son presentadas comparándolas, cuando es posible, con las correspondientes soluciones exactas.

En virtud de que los problemas aquí tratados son todos axisimétricos, tanto en la geometría como en el sistema de fuerzas, hemos empleado un elemento axisimétrico, en particular el elemento isoparamétrico lineal.

Dada la naturaleza del algoritmo empleado, los desplazamientos y velocidades son conocidos en cada nudo de la partición realizada y las tensiones y deformaciones son conocidas para cada punto de integración. Los resultados de tensiones, presentados en las figuras que mostraremos más adelante, corresponden a tensiones en el centro del elemento. Aquí debemos observar lo siguiente, el programa de cálculo automático elaborado permite seleccionar el número de puntos de integración en cada elemento (4,9). De esta manera, el cálculo de la tensión en el centro del elemento se realiza a través del promedio de las tensiones alcanzadas en los puntos de integración, solamente cuando dichos puntos no contienen al centro del elemento. Por otra parte los resultados presentados en las figuras corresponden al caso de 4 puntos de integración siendo que, los resultados obtenidos para 9 no presentaron diferencias como para ser consideradas.

Para el análisis de los problemas elastoplásticos pro
cedemos a aplicar el algoritmo presentado en el Párrafo V.5. Como
vimos allí, el proceso iterativo a nivel de cada incremento
de carga era suspendido cuando: "el módulo del vector de fuerzas
asociado a las deformaciones viscoplásticas sea suficientemente
pequeño comparando con el módulo del vector incremento de
carga". En los ejemplos hemos adoptado como criterio el siguien
te:

$$\frac{||\Delta P|| - ||H^{VP}||}{||\Delta P||} < \varepsilon = 0.001$$

donde:

$||\Delta P||$ es la norma del vector incremento de carga

$||H^{VP}||$ es la norma del vector de fuerzas asociado a las deforma
ciones plásticas.

Para la selección del paso de integración (Δt), tanto
para problemas en plasticidad, creep y viscoplasticidad, se llevó
en cuenta dos aspectos⁴⁹. El primero consiste en limitar el
incremento de deformación inelástica a un porcentaje de la de
formación inelástica acumulada. En cada punto de integración
tomamos:

$$\Delta \bar{t} ||D^{VP}|| = \tau ||E^{VP}||$$

donde:

$||D^{VP}||$ es la norma, para el instante de tiempo que se está es
tudiando, de la velocidad de deformación inelástica.

$\|E^{vp}\|$ es la norma de la deformación inelástica acumulada.

$$\tau = 0.1$$

Siendo que, de todos los $\Delta \bar{t}$ obtenidos adoptamos el menor de ellos que llamaremos Δt .

El segundo aspecto consiste en limitar este Δt a un porcentaje del Δt empleado en el paso anterior, que designaremos Δt_a . En nuestro caso adoptamos:

$$\Delta t \leq 1.5 \Delta t_a$$

A continuación procedemos a presentar los resultados obtenidos para los ejemplos de la esfera hueca, cilindro hueco infinito y disco girando alrededor de su eje. Cada uno de estos ejemplos fue analizado para materiales elastoplásticos, creep secundario, y materiales elasto/viscoplásticos. En cada uno de ellos fueron analizadas diferentes ecuaciones constitutivas.

V.7.1. Ejemplos en plasticidad.

EJEMPLO 1. Se estudió el problema de una esfera hueca con presión interna, constituida de un material plástico ideal que verifica la ley de von Mises.

La región de la esfera analizada mediante el algoritmo elasto/viscoplástico fue dividida en elementos, como indica la figura V.1.a.

Las distribuciones de tensiones circunferenciales y radiales, obtenidas para diferentes niveles de plastificación, son presentadas conjuntamente con las soluciones exactas,

en la figura V.2. para la relación de radios $r_e/r_i=1.5$, y en la figura V.3. para $r_e/r_i = 2$. (Ejemplo 1, Capítulo I). La presión interna y los correspondientes desplazamientos radiales de los puntos internos y externos de la esfera, son dados cuando $r_e/r_i = 1.5$ en la figura V.4. y cuando $r_e/r_i = 2$ en la figura V.5.

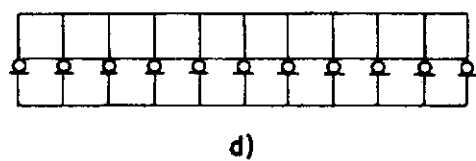
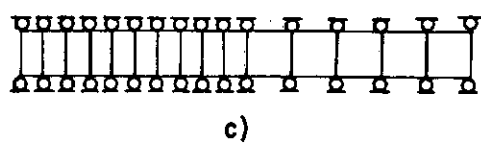
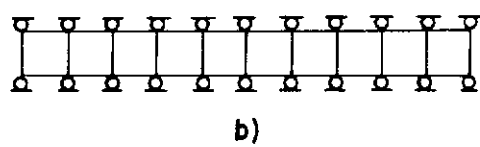
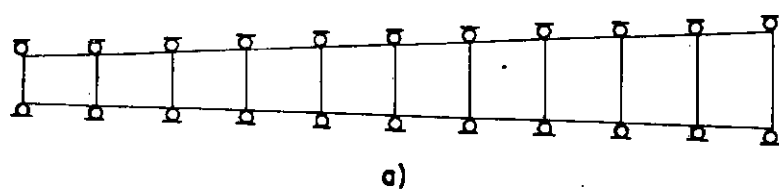
Si bien los resultados numéricos obtenidos para las tensiones (figuras V.2. y V.3.) se aproximan bastante a las soluciones exactas, en el caso de los desplazamientos (figuras V.4. y V.5.) los resultados numéricos se separan de la solución exacta a medida que nos acercamos a la carga límite, siendo la diferencia mayor cuando la esfera hueca es más espesa o sea $r_e/r_i = 2$.

EJEMPLO 2. El cilindro hueco con presión interna fue analizado para el caso de plasticidad ideal, ley de Tresca (Ejemplo 2, Capítulo I).

La región del cilindro estudiada fue subdividida en 10 elementos como indica la figura V.1.b.

Para diferentes niveles de plastificación la distribución de tensiones radiales, axiales y circunferenciales, tanto en la zona elástica como plástica, son presentadas comparándolas con las soluciones exactas en las figuras V.6-7 - 8.

La presión correspondiente a los diferentes niveles de plastificación analizados y los respectivos desplazamientos radiales de puntos internos y externos de un cilindro hueco con relación de radios $r_e/r_i = 2$, son dados en la figura V.9.




 apoyo deslizable

Fig. V.1.

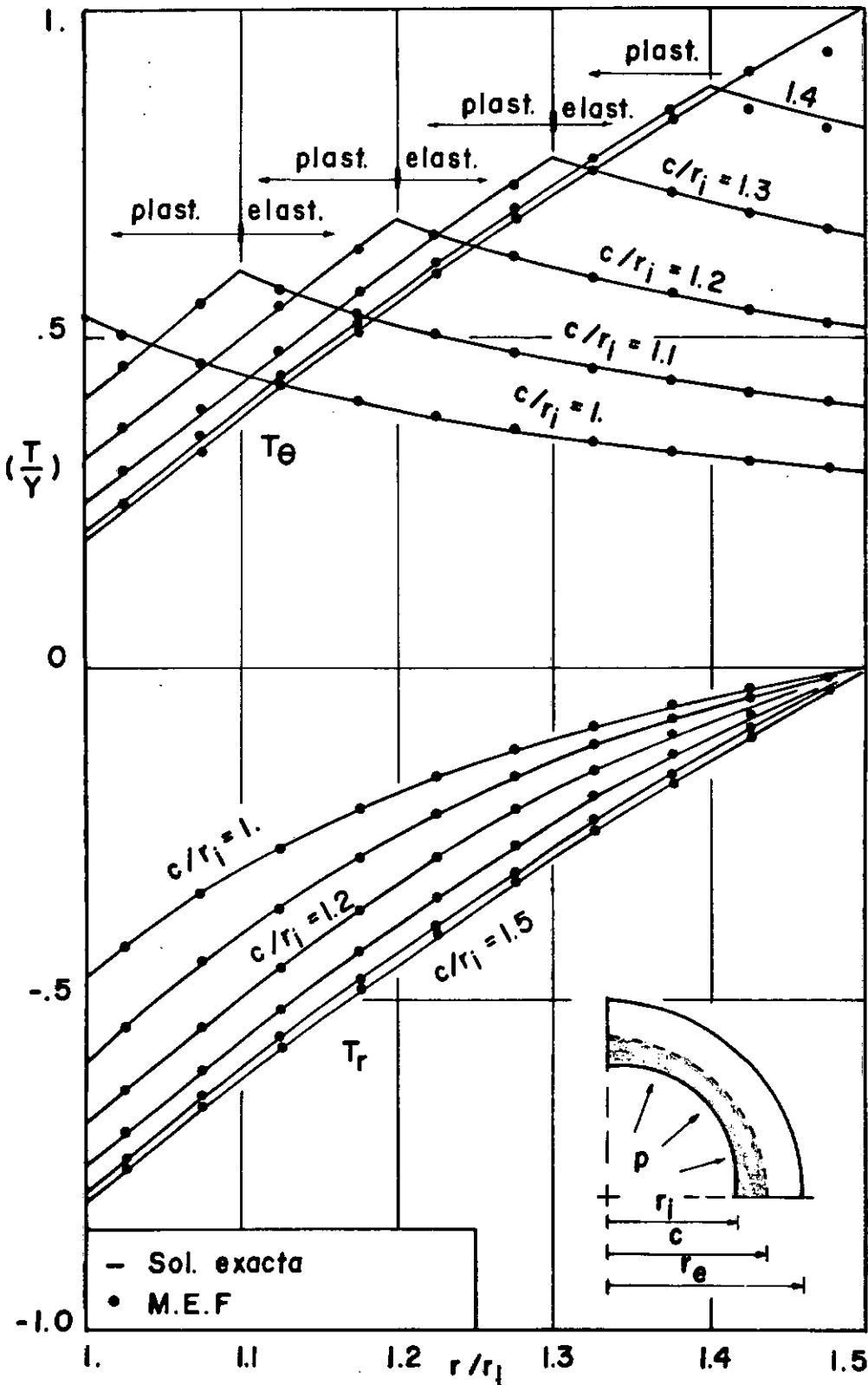


Fig.V.2. Tensiones circunferenciales y radiales en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i = 1.5$. Plasticidad ideal, ley de von Mises.

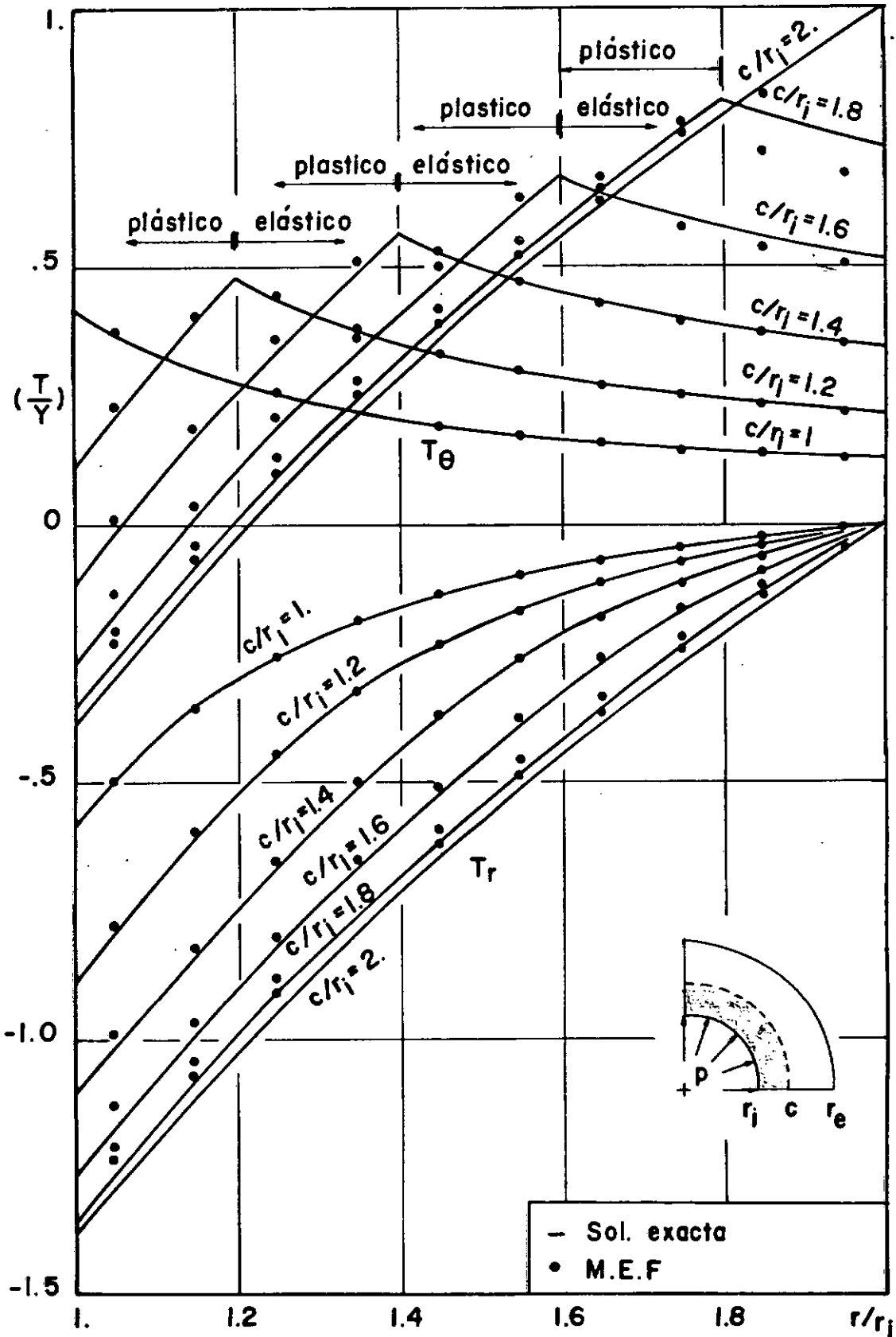


Fig. V.3. Tensiones circunferenciales y radiales en esfera con presión interna, relación de radios $r_e/r_i = 2$. Plasticidad ideal, ley de von Mises.

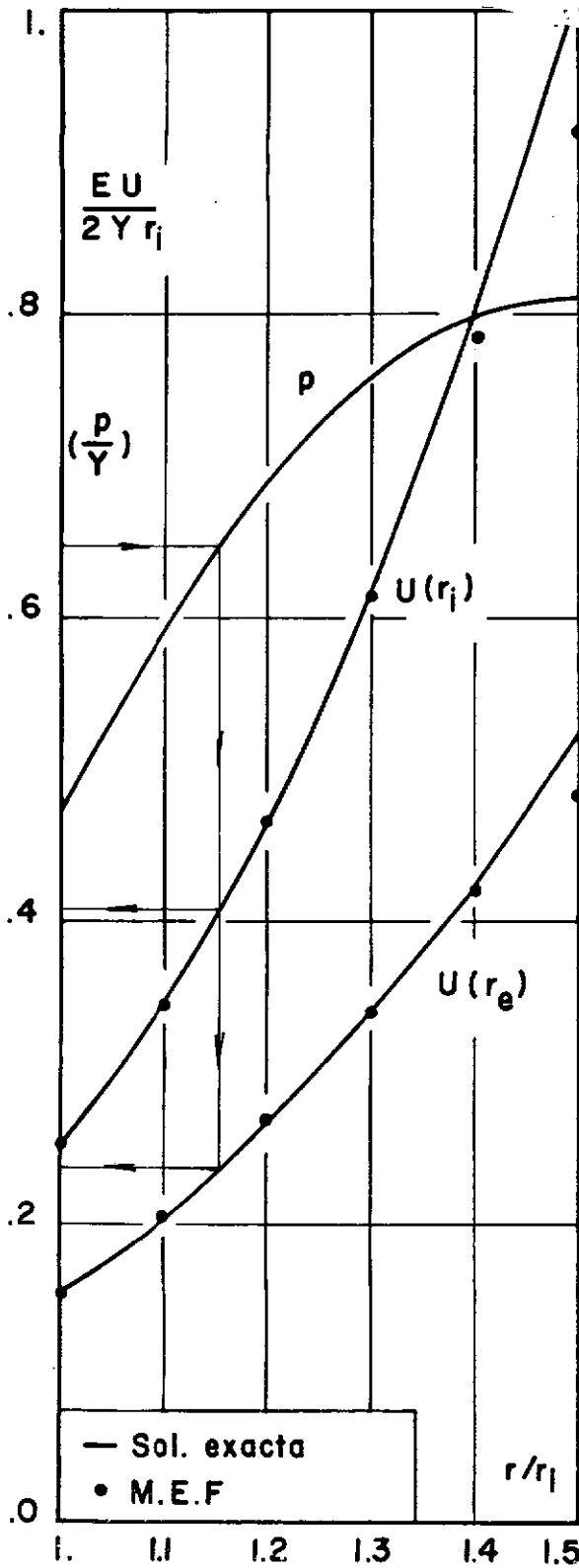


Fig.V.4. Presión interna y desplazamientos en esfera hueca, $r_e/r_i=1.5$. Plasticidad ideal, ley de von Mises.

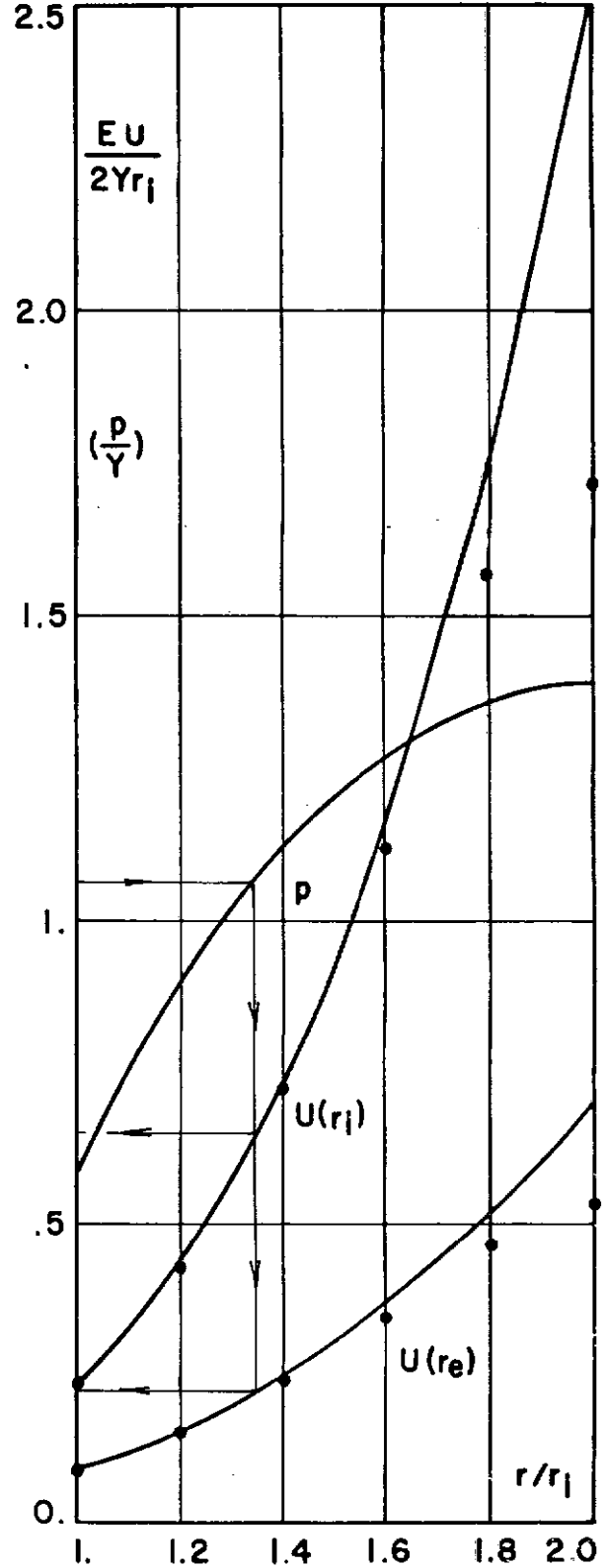


Fig.V.5. Presión interna y desplazamientos en esfera hueca, $r_e/r_i=2$. Plasticidad ideal, ley de von Mises.

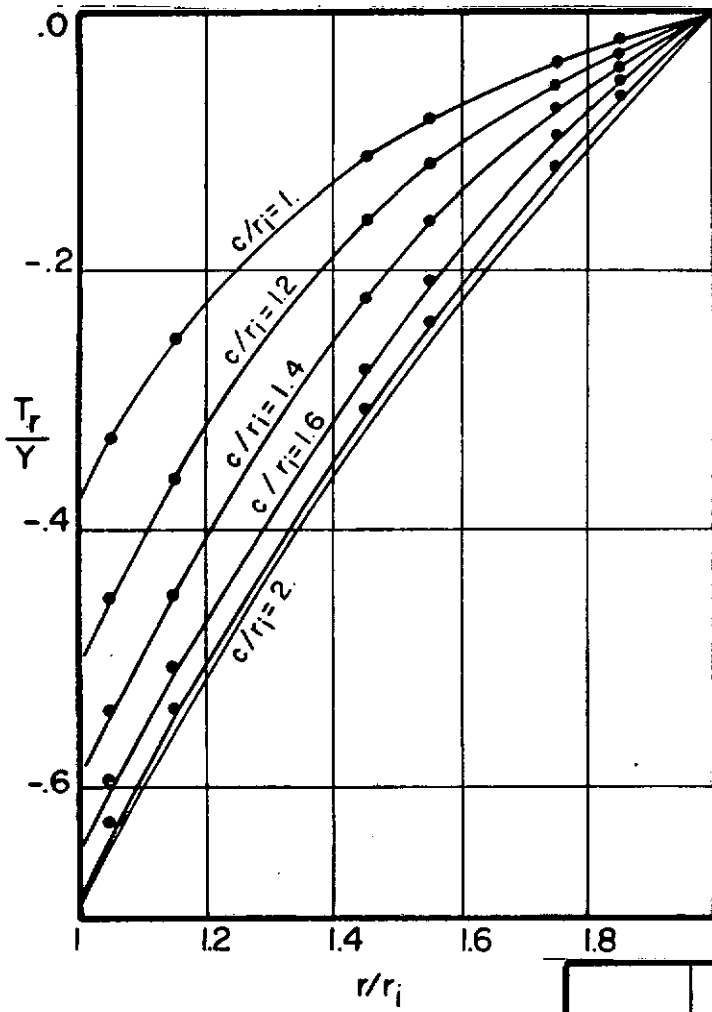
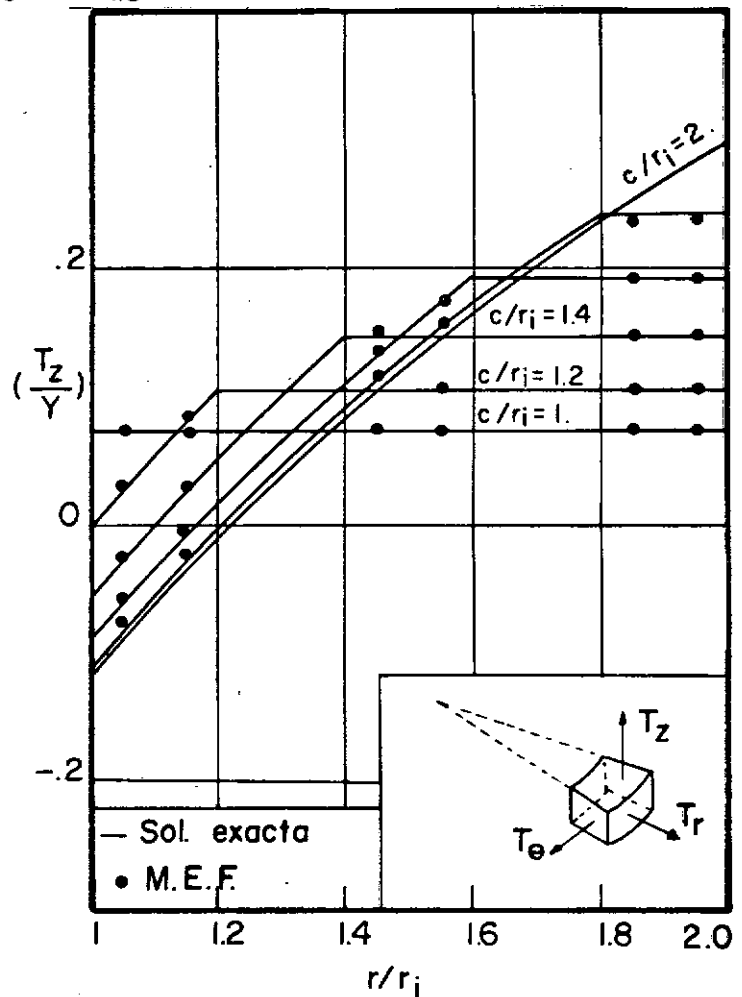


Fig.V.6. Tensión radial en tubo hueco con presión interna, relación de radios $r_e/r_i = 2$. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

Fig.V.7. Tensión axial en tubo hueco con presión interna, relación de radios $r_e/r_i = 2$. Plasticidad ideal, ley de Tresca.



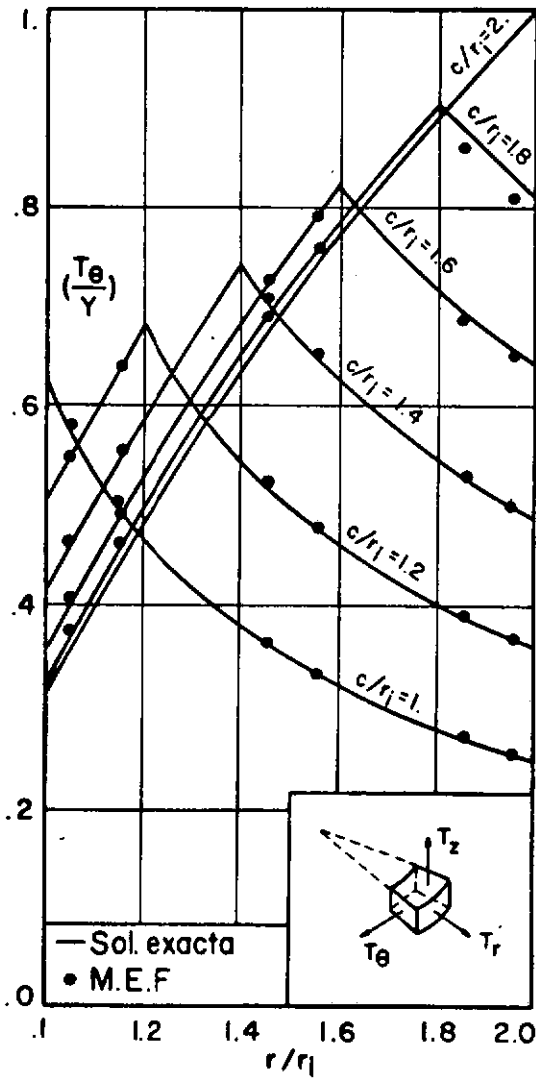
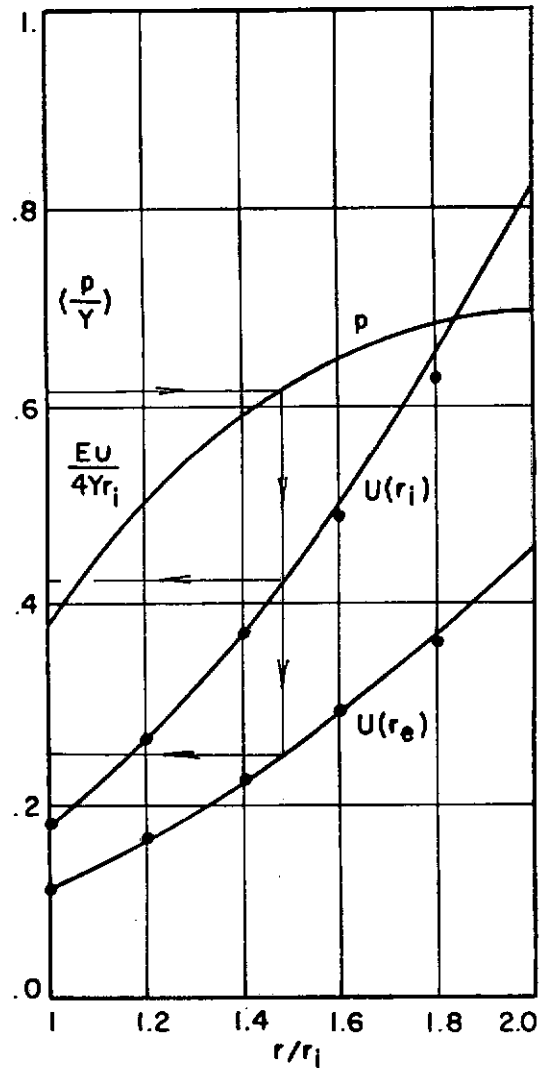


Fig.V.8. Tensión circunferencial en tubo hueco con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=2$. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

Fig.V.9. Presión interna y desplazamientos en tubo hueco, relación de radios $r_e/r_i=2$. Plasticidad ideal, ley de Tresca.



Los resultados numéricos obtenidos tanto en desplazamientos como en tensiones hasta el nivel de plastificación

$c/r_i = 1.8$, son excelentes si se tiene en cuenta la poca cantidad de elementos empleados en la subdivisión de la región analizada.

Finalmente en la figura V.10. se presentan los valores de las tensiones y desplazamientos residuales obtenidos luego de cargar el cilindro hasta el nivel de plastificación $c/r_i = 1.4$. y descargarlo posteriormente. En este caso los resultados numéricos también coinciden con la solución exacta.

EJEMPLO 3. Se analizó un disco hueco de espesor constante y relación de radios $r_e/r_i = 4$, para las leyes constitutivas de plasticidad ideal de von Mises, Tresca y von Mises-Tresca. La región del disco estudiada fue subdividida en 20 elementos como indica la figura V.1.d.

Para todas las leyes constitutivas mencionadas, se consideraron 6 niveles de velocidad angular, correspondientes a los niveles de plastificación $c/r_i = 1., 1.6, 2.2, 2.8, 3.4, 4.$, determinados admitiendo que el material verifica la ley de Tresca (Ejemplo 3, Capítulo I).

En la figura V.11. se presentan las distribuciones de tensiones radiales y circunferenciales en el disco, obtenidas mediante el empleo del algoritmo elasto/viscoplástico para el caso particular de la ley de Tresca, y se las compara con la solución exacta. En todos los niveles de velocidad del disco, los promedios de las tensiones, tomadas en el centro de cada elemento, coinciden con la solución exacta y solamente cuando el disco alcanza la velocidad límite plás

tica, la tensión circunferencial en el elemento 10, difiere algo de la solución exacta.

En la figura V.12. se presentan las tensiones obtenidas mediante el método aproximado para el caso particular de la ley de plasticidad ideal de von Mises.

Los seis niveles de velocidad angular analizados en este caso, son iguales a los empleados cuando se consideró la ley de plasticidad ideal de Tresca.

En el caso de la ley de Tresca, la tensión circunferencial no puede superar el valor de fluencia del ensayo de tracción uniaxial, $T_{\theta} \leq Y$, mientras que en el caso de la ley de von Mises, el criterio de plasticidad permite obtener tensiones circunferenciales superiores, $T_{\theta} > Y$.

Cuando el disco plastifica totalmente ($c/r_i = 4$) según la ley de Tresca, en el caso de la ley de von Mises el nivel de plastificación alcanza solamente el valor $c/r_i = 2.5$.

En la figura V.13. se comparan las tensiones obtenidas para las 3 leyes plásticas cuando el nivel de plastificación del disco, según la ley de Tresca, alcanza el valor $c/r_i = 2.2$.

Las tensiones obtenidas mediante la ley de Tresca y von Mises coinciden. Salvo en la zona plastificada las tensiones radiales correspondientes a ambas leyes constitutivas presentan una pequeña diferencia. La tensión radial obtenida mediante la ley constitutiva de von Mises es superior a las otras dos y tal como fue observado, en la zona plastificada la tensión circunferencial toma valores superiores al valor de la tensión de fluencia Y .

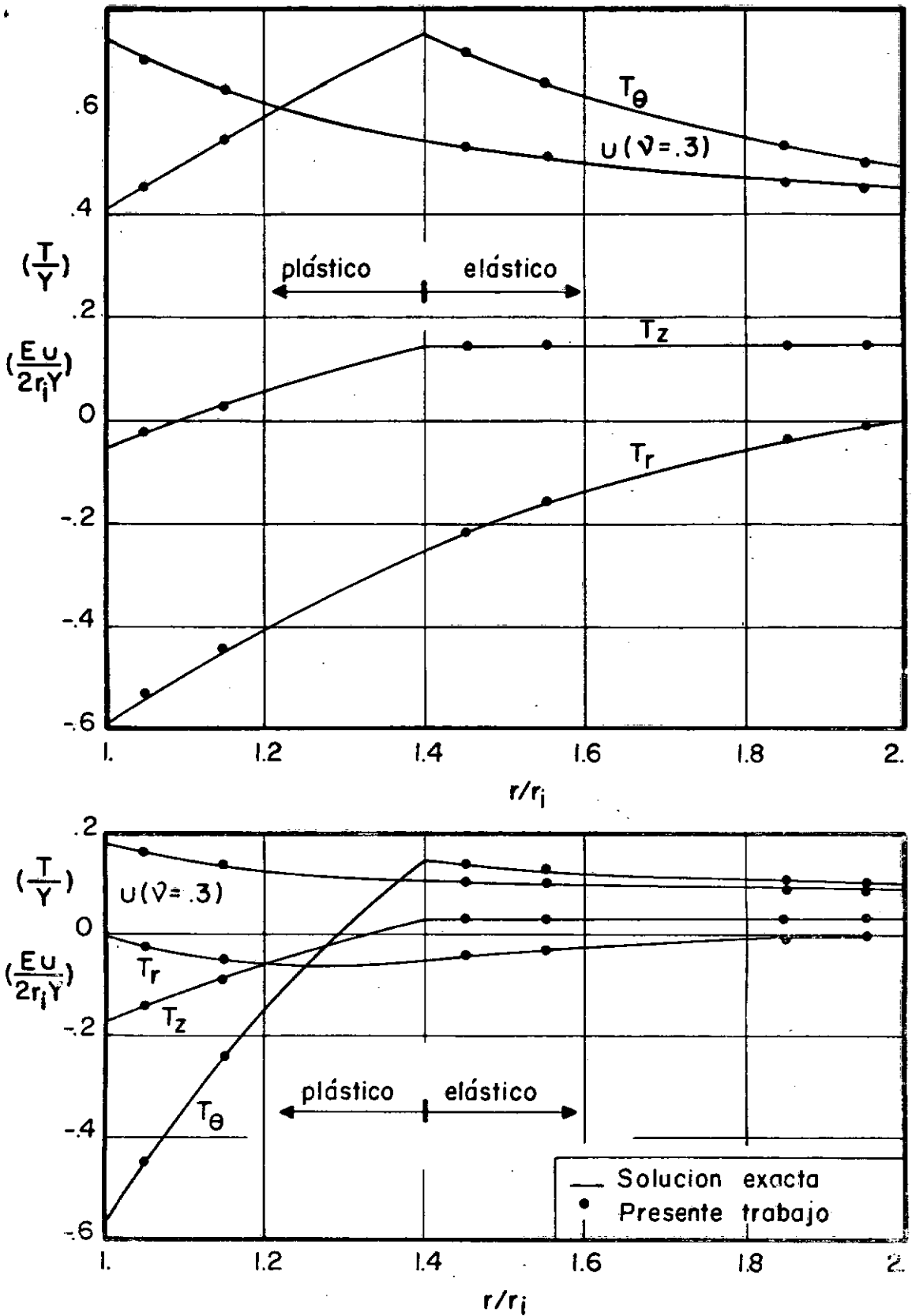


Fig.V.10. Tensiones y desplazamiento residual en tubo hueco con presión interna. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

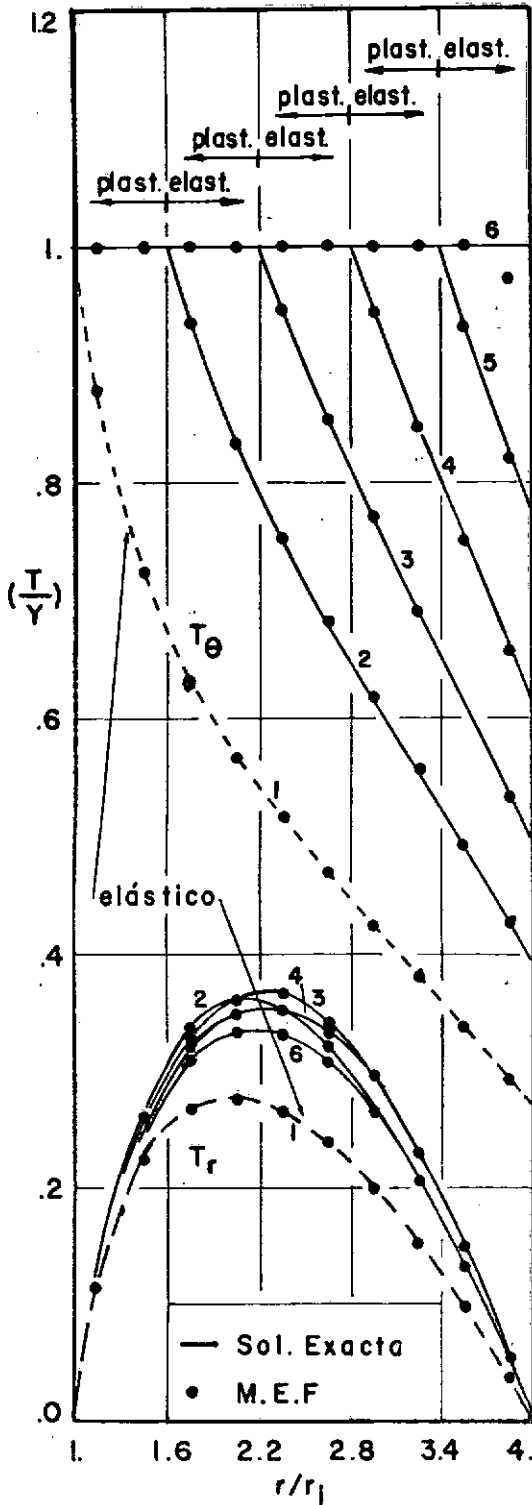


Fig.V.11. Tensiones en disco hueco que gira a velocidad constante, relación de radios $r_e/r_i=4$. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

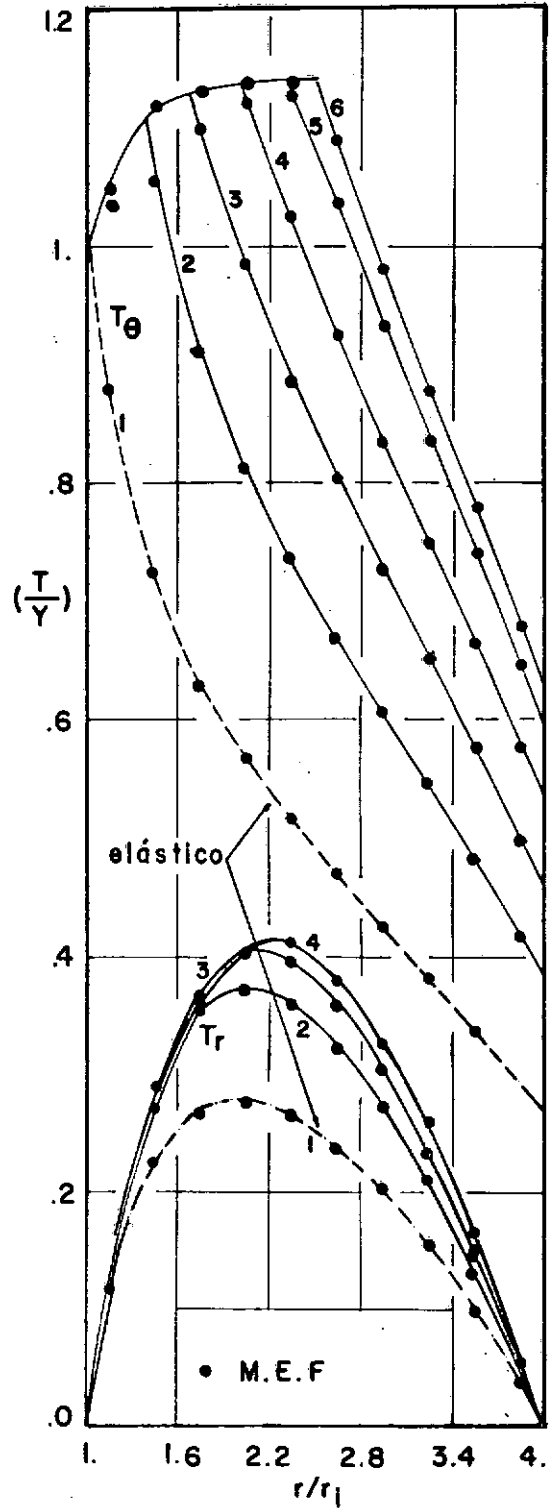


Fig.V.12. Tensiones en disco hueco que gira a velocidad constante, relación de radios $r_e/r_i=4$. Plasticidad ideal, ley de von Mises.

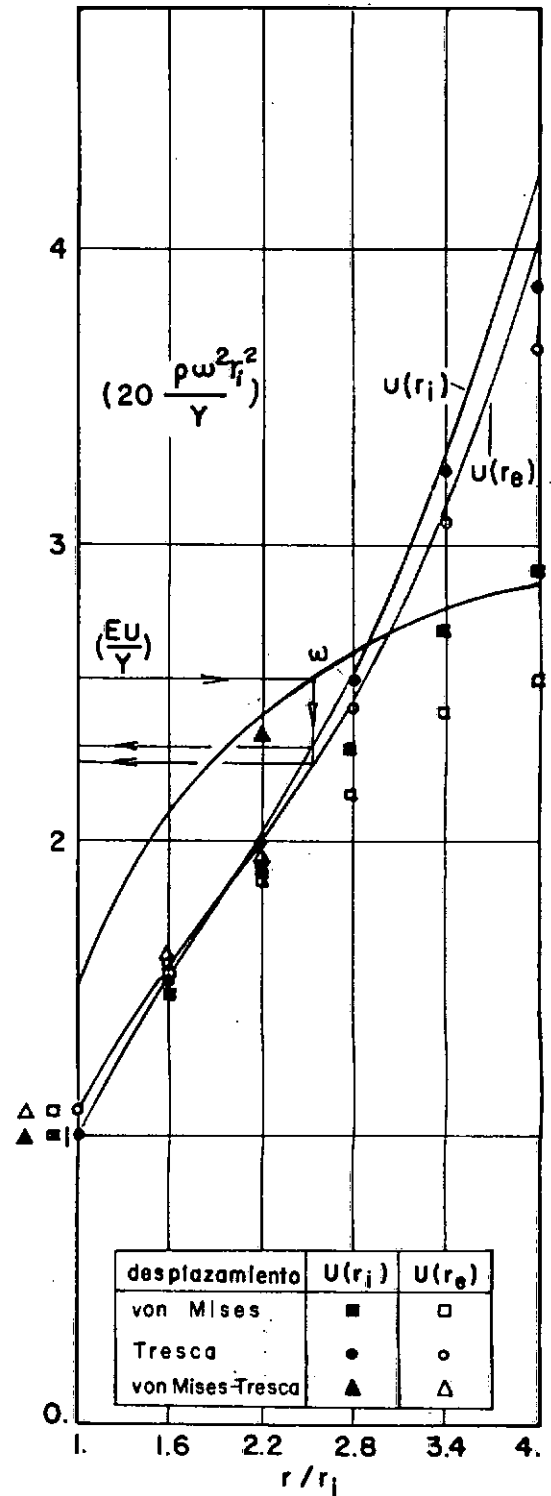
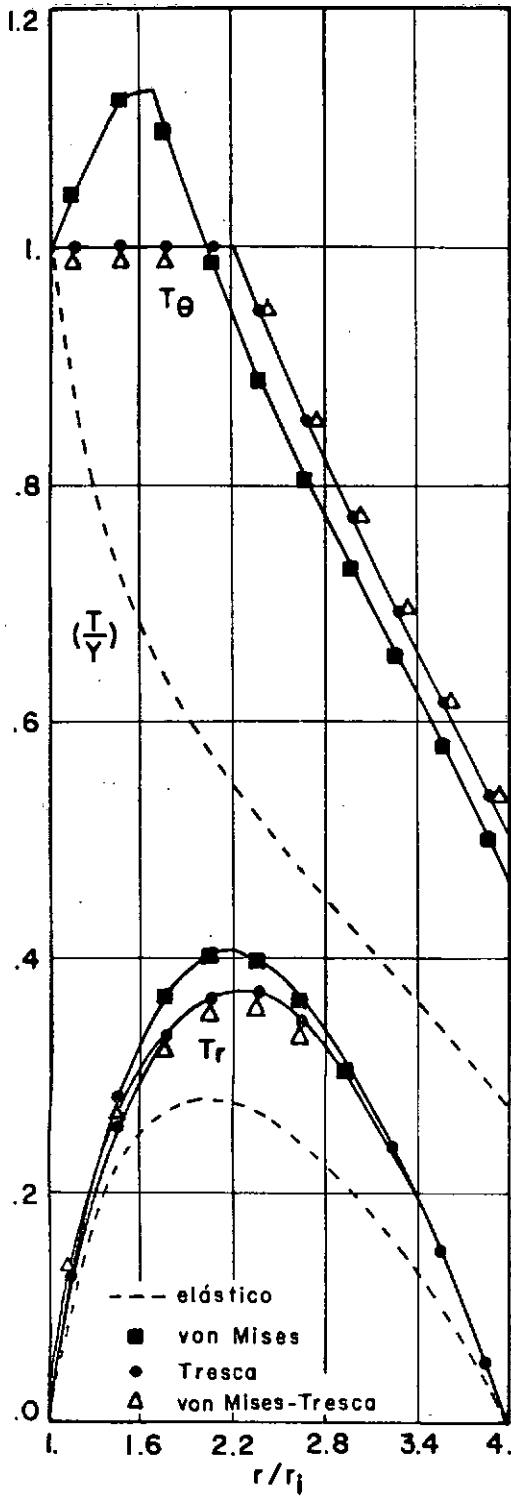


Fig.V.13. Tensiones en disco hueco. Plasticidad ideal, leyes de von Mises, Tresca y von Mises-Tresca

Fig.V.14. Velocidad angular y desplazamientos. Leyes de von Mises, Tresca y von Mises-Tresca.

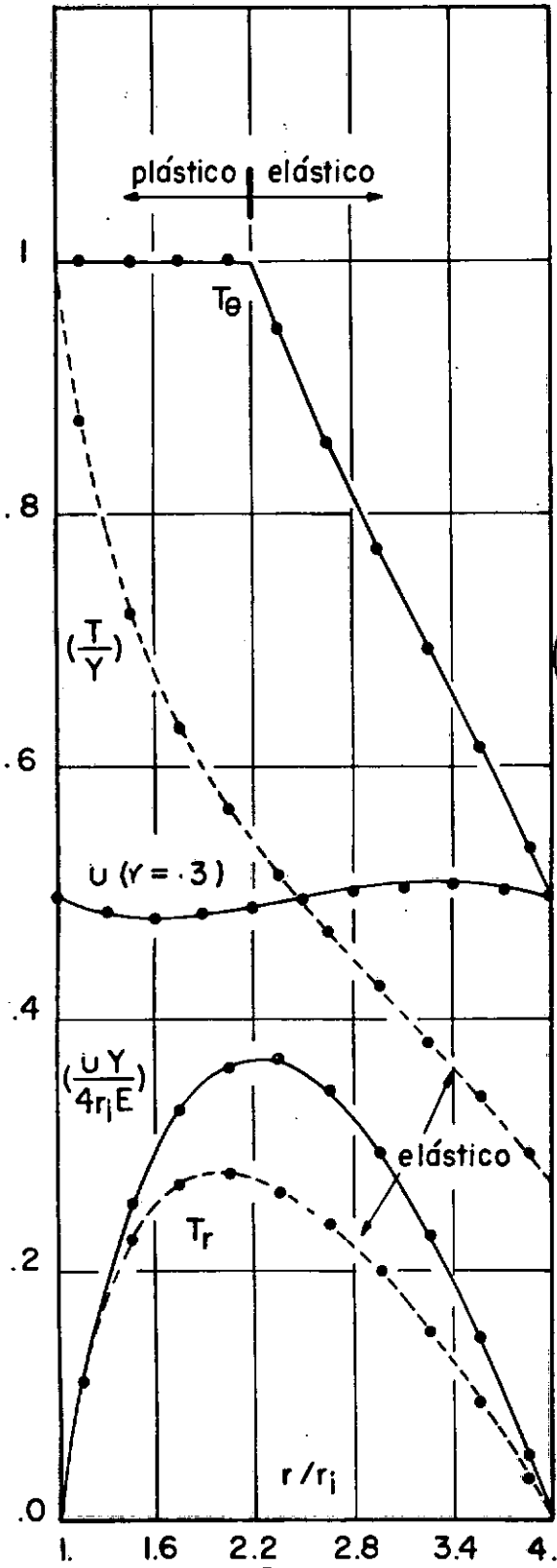


Fig.V.15. Tensiones y desplazamiento en disco hueco. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

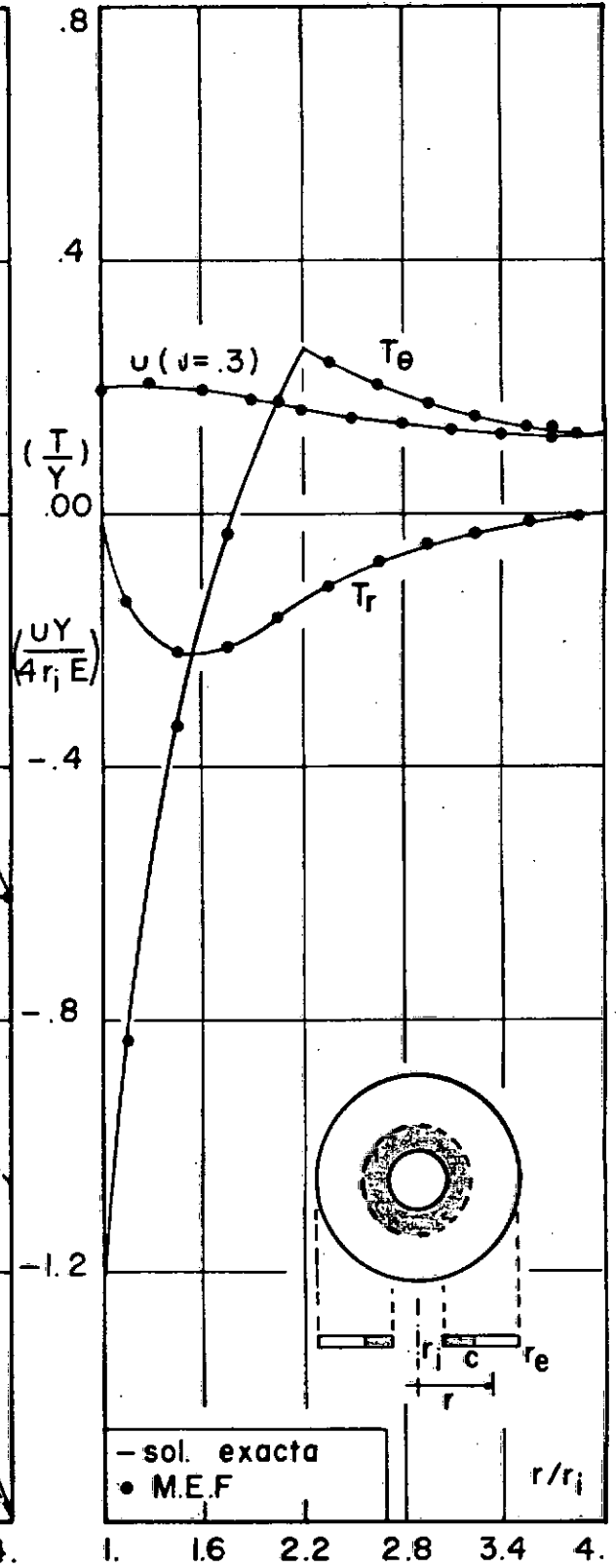


Fig.V.16. Tensiones y desplazamiento residuales, en disco hueco. Plasticidad ideal, ley de Tresca.

La velocidad angular correspondiente a diferentes niveles de plastificación y los respectivos desplazamientos radiales de puntos del círculo interno y externo del disco hueco, para las tres leyes constitutivas y para la solución exacta, son dados en la figura V.14.

En dicha figura, se aprecia que a medida que la velocidad angular del disco se acerca al límite plástico los resultados numéricos se apartan de la solución exacta.

Finalmente en las figuras V.15 y 16 se muestran los valores de las tensiones y del desplazamiento correspondientes al nivel de plastificación $c/r_i = 2.2$ y las tensiones y desplazamiento residuales posteriores al frenado del disco. Dichos resultados coinciden también con las respectivas soluciones exactas.

V.7.2. Ejemplos en creep secundario.

EJEMPLO 1. Se analizó el problema de una esfera hueca, sometida a una presión interna constante y constituida de un material que experimenta deformaciones de creep secundario según la ley de von Mises-Odqvist. La región de la esfera estudiada fue dividida en 10 elementos como indica la figura V.1.a.

Las distribuciones de tensiones radiales y circunferenciales para $n = 1, 2, 6$ obtenidas mediante el algoritmo elasto/viscoplástico, para una relación de radios $r_e/r_i = 1.5$, son presentadas en la figura V.17, conjuntamente con las correspondientes soluciones exactas (Ejemplo 1, Párrafo II.7).

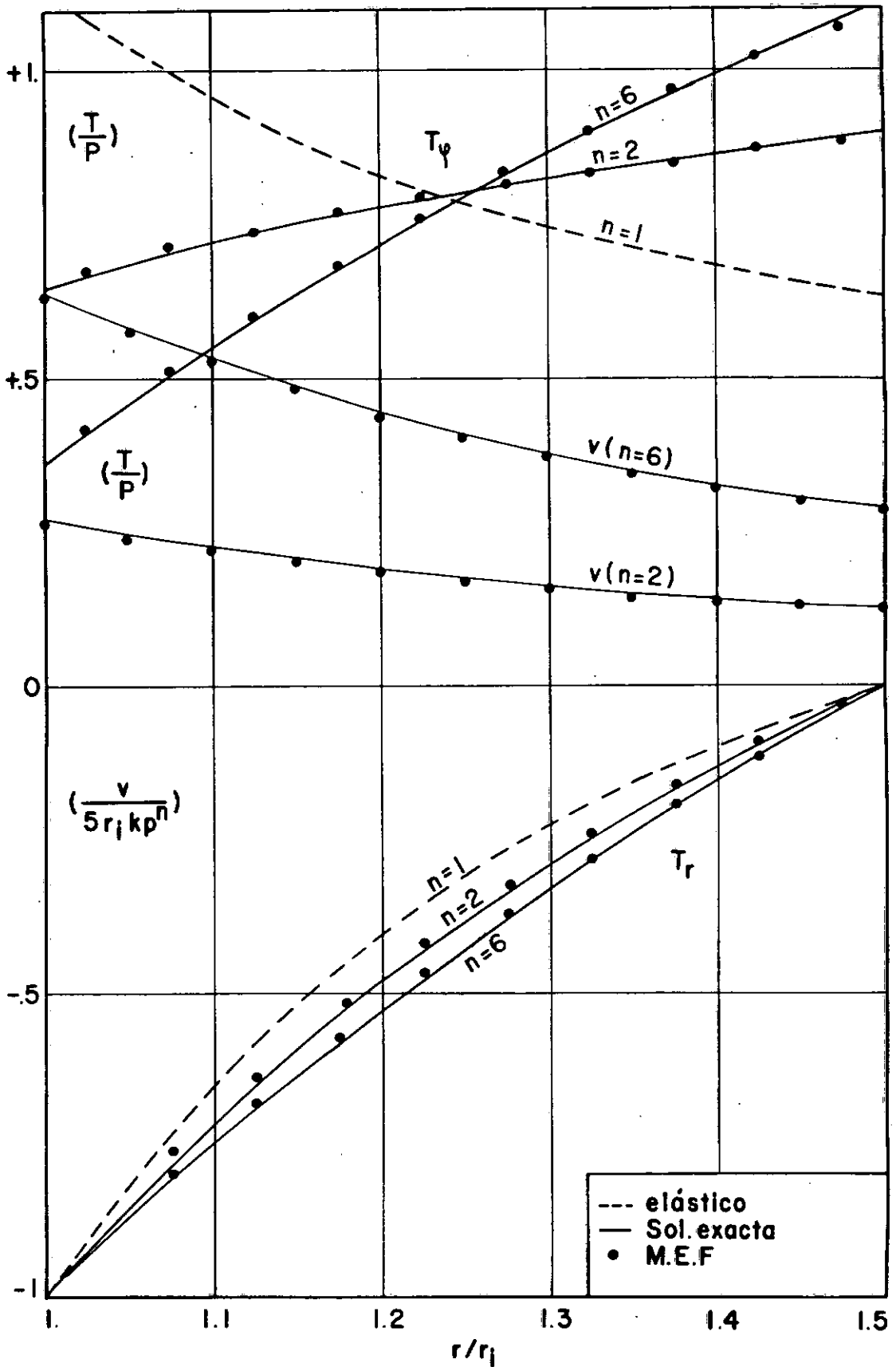


Fig.V.17. Tensiones y velocidad en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Creep secundario, ley de von Mises-Odqvist.

En dicha figura son comparados también, los valores aproximados de la velocidad para $n=2$ y 6 con las respectivas soluciones exactas. Tanto los valores de las tensiones, como los de las velocidades coinciden prácticamente con las soluciones exactas.

EJEMPLO 2. Un cilindro hueco infinito con presión interna constante, y relación de radios $r_e/r_i = 4$ fue analizado para el caso de la ley constitutiva de creep secundario de von Mises-Odqvist. Se empleó el algoritmo elasto/viscoplástico y la región estudiada fue dividida en elementos como indica la figura V.1.c.

Los valores de las tensiones radial, axial y circunferencial para $n=1,2$ y 6 (figura V.18) coinciden con la correspondiente solución exacta (Ejemplo 2, Párrafo II.7).

EJEMPLO 3. El caso de discos huecos que giran a velocidad constante y que experimentan deformaciones de creep en régimen estacionario fue analizado para diferentes leyes constitutivas.

Se determinó la distribución de tensiones en un disco hueco de radio interior $r_i = 1.25\text{in}$ y radio exterior $r_e = 6\text{in}$, que gira a una velocidad de $\omega = 15000\text{rpm}$, con masa específica $\rho = 7.35 \times 10^{-4} \text{lb. seg}^2/\text{in}^4$.

Utilizando el modelo elasto/viscoplástico y empleando las leyes constitutivas de von Mises-Odqvist, von Mises-Tresca y Tresca se obtuvieron soluciones para diferentes valores de $n(n=4,6,9)$.

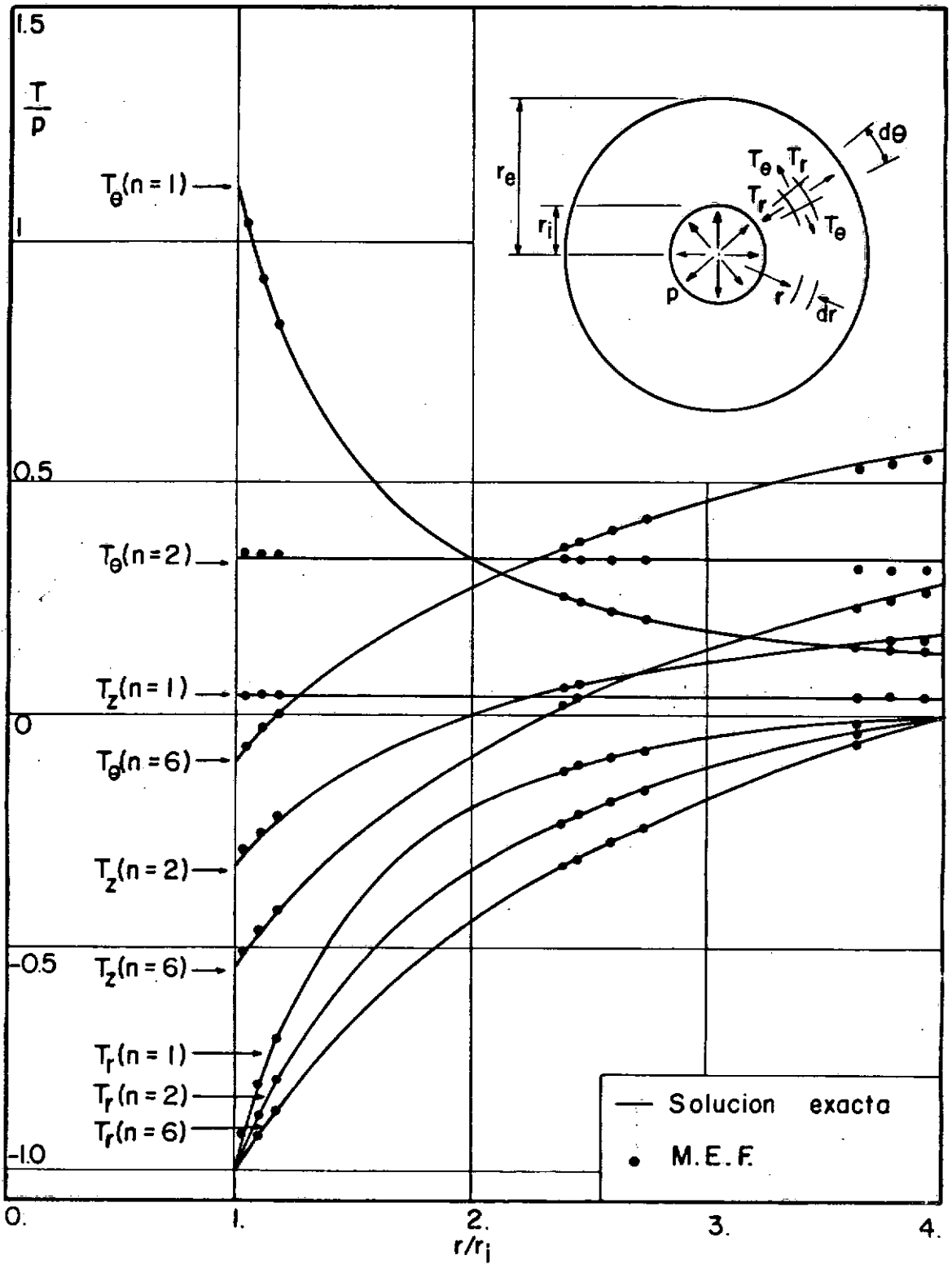


Fig.V.18. Tensiones y velocidad en tubo hueco con presión interna, relación de radios $r_e/r_i = 4$. Creep secundario, ley de von Mises-Odqvist.

En las figuras V.19 y 20 se comparan los valores obtenidos para las leyes de von Mises-Odqvist y von Mises-Tresca, con los resultados a que arriba WHAL³⁰ integrando numericamente las ecuaciones diferenciales. También presentamos la correspondiente solución elástica.

En la figura V.21. se presentan los resultados obtenidos para la ley de Tresca, con la correspondiente solución exacta (Ejemplo 3, Párrafo II.7).

En todos los casos, los valores obtenidos mediante el modelo elasto/viscoplástico coinciden con los presentados por Whal para los casos de von Mises-Odqvist y von Mises-Tresca y con la solución exacta para el caso de Tresca.

Finalmente, en la figura V.22 se presentan las tensiones obtenidas empleando las tres leyes constitutivas anteriormente mencionadas para $n=6$. En dicha figura, se aprecia que las tensiones radiales practicamente coinciden y que las tensiones circunferenciales, para cada ley de creep, presentan diferencias pequeñas.

V.7.3. Ejemplo en elasto/viscoplasticidad.

EJEMPLO 1. Se analizó el caso de una esfera hueca sometida a una presión interna constante superior al valor del límite plástico. Dicha esfera está constituida de material elasto/viscoplástico que satisface la ley de Hohenemser-Prager. Se empleó el algoritmo elasto/viscoplástico y la región de la esfera estudiada fue subdividida en elementos como indica la figura V.1.a.

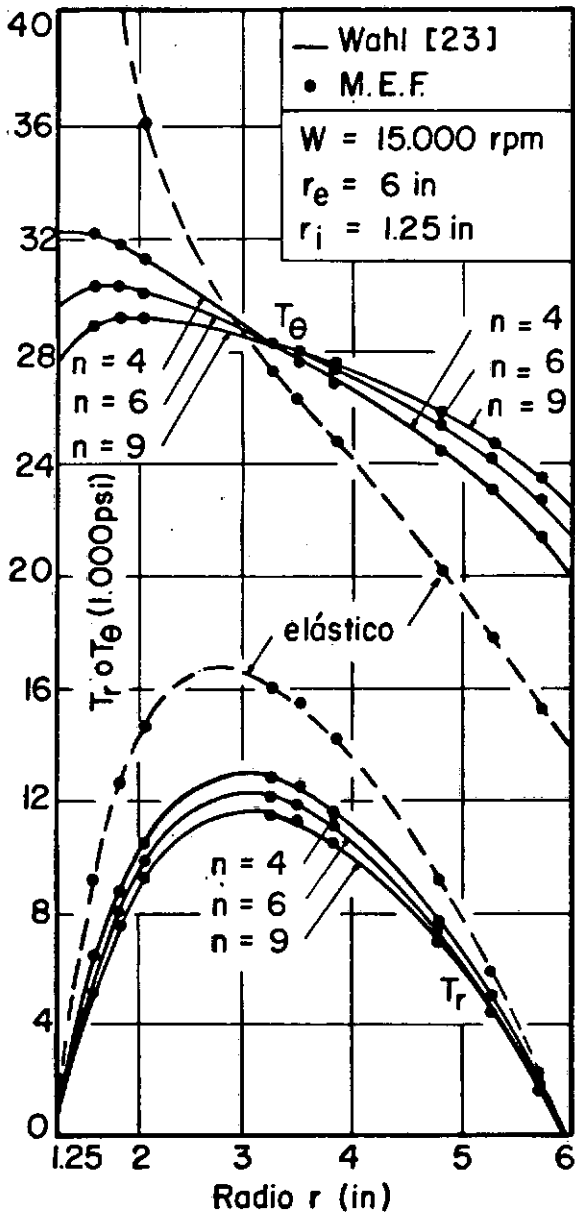


Fig.V.19. Tensiones en disco hueco que gira a velocidad constante. Creep secundario, ley de von Mises-Odqvist.

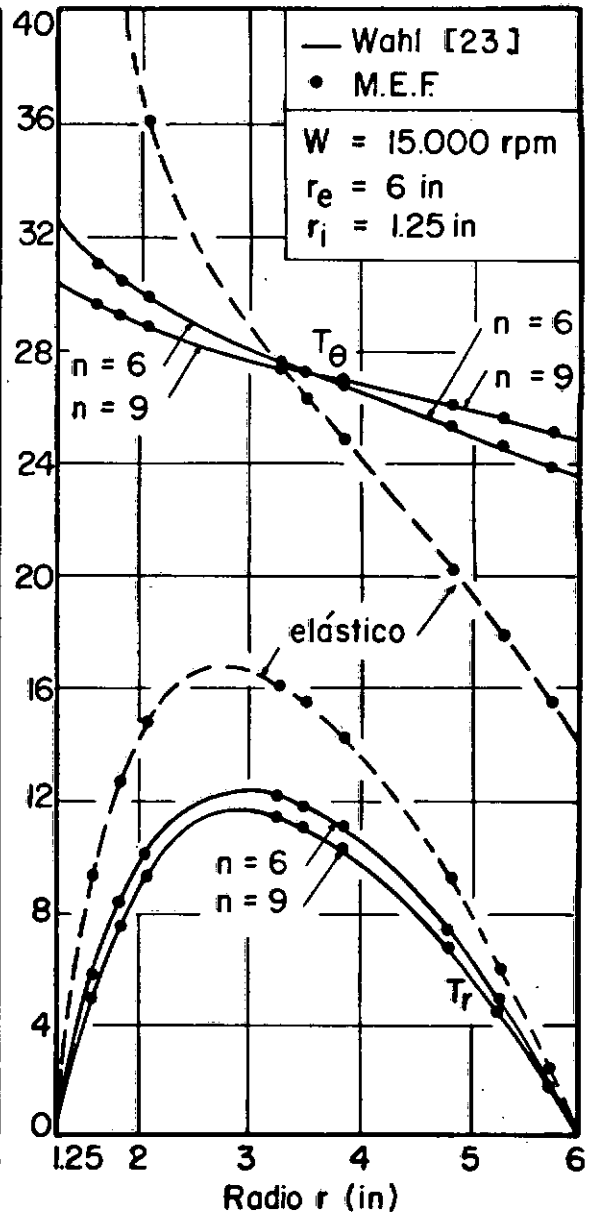


Fig.V.20. Tensiones en disco hueco que gira a velocidad constante. Creep secundario, ley de von Mises - Tresca.

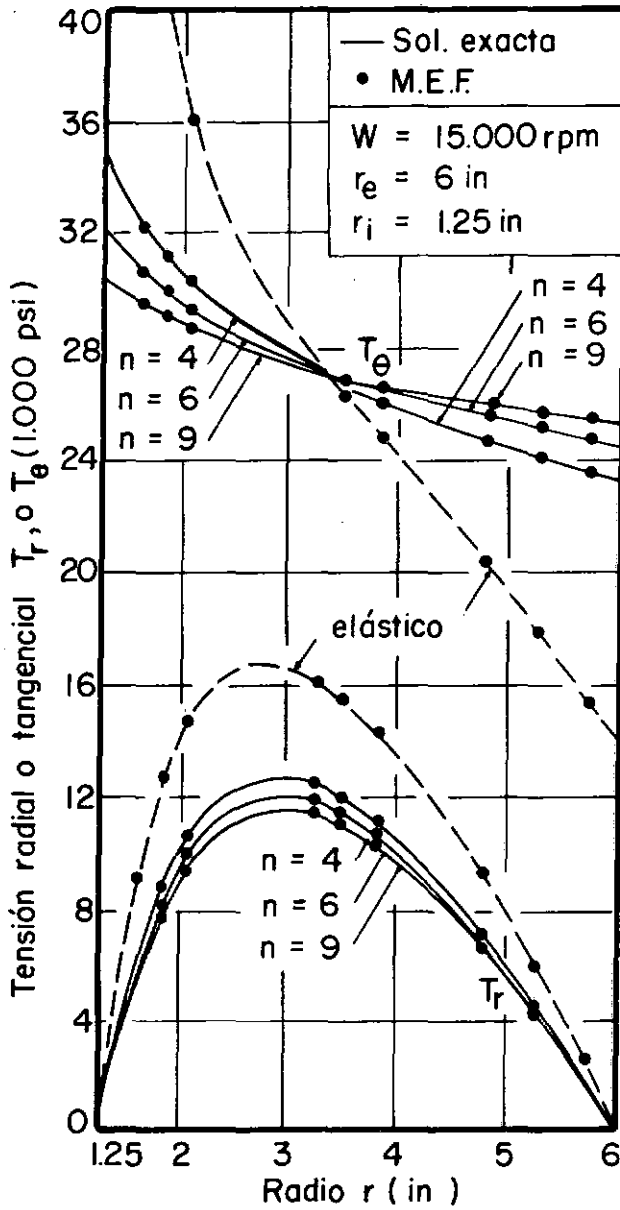


Fig.V.21. Tensiones en disco hueco que gira a velocidad constante. Creep secundario, ley de Tresca.

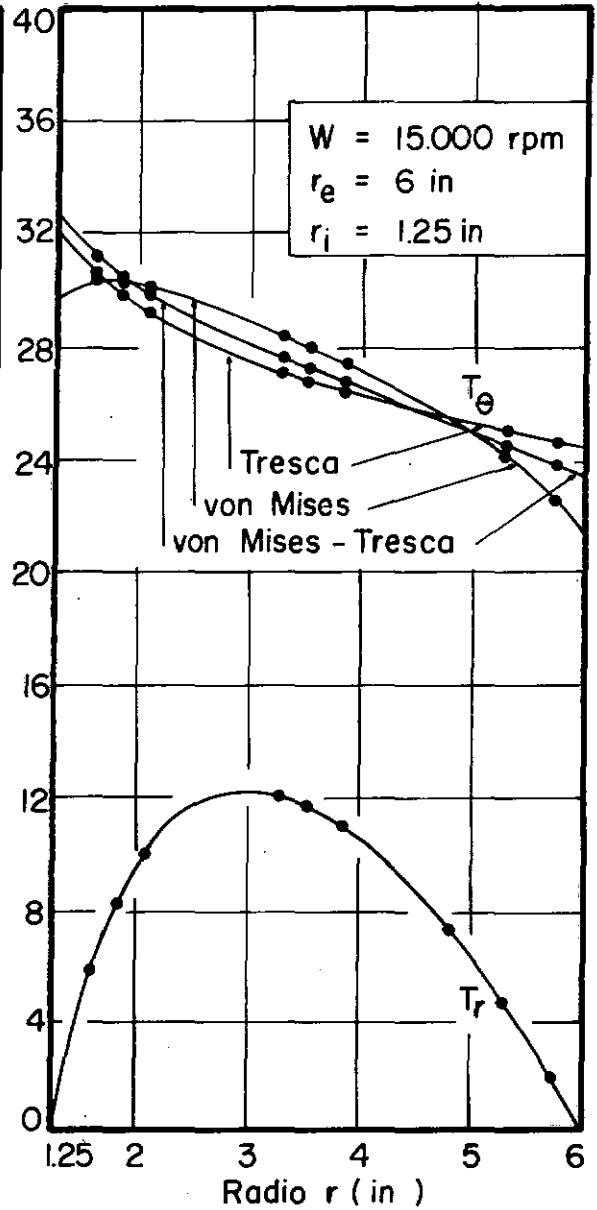


Fig.V.22. Tensiones en disco hueco. Creep secundario, leyes de von Mises-Odqvist, Tresca y von Mises-Tresca.

Se determinaron las distribuciones de tensiones y velocidad en una esfera de radio interior $r_i = 100\text{cm}$, radio exterior $r_e = 150\text{cm}$, presión interna $p = 2000\text{kg/cm}^2$, tensión de fluencia $Y = 1000\text{kg/cm}^2$, módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^7\text{kg/cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y coeficiente de fluidez $\gamma = 100/\sqrt{3}\text{ seg}^{-1}$.

En las figuras V.23 y 24 se presentan las distribuciones de tensiones radiales y circunferenciales obtenidas para diferentes valores de t y se las compara con la solución exacta (Ejemplo 1, Párrafo IV.3).

En las figuras V.25 y 26 se muestran los resultados obtenidos para la tensión efectiva y velocidad, comparándolos también con la solución exacta. Tanto en tensiones como en velocidad los resultados a que se arribaron prácticamente coinciden con la solución exacta.

Finalmente en la figura V.27 se muestra la variación con el tiempo de las tensiones radiales y circunferenciales, en determinados puntos de la esfera elasto/viscoplástica. Por último debe observarse que cuando $t \rightarrow \infty$ se obtiene la solución del problema equivalente para material viscoplástico (Ejemplo 1, Párrafo III.8). En nuestro caso la condición de estacionaridad prácticamente es alcanzada para $t = 1 \times 10^{-5}$ (Figura V.27).

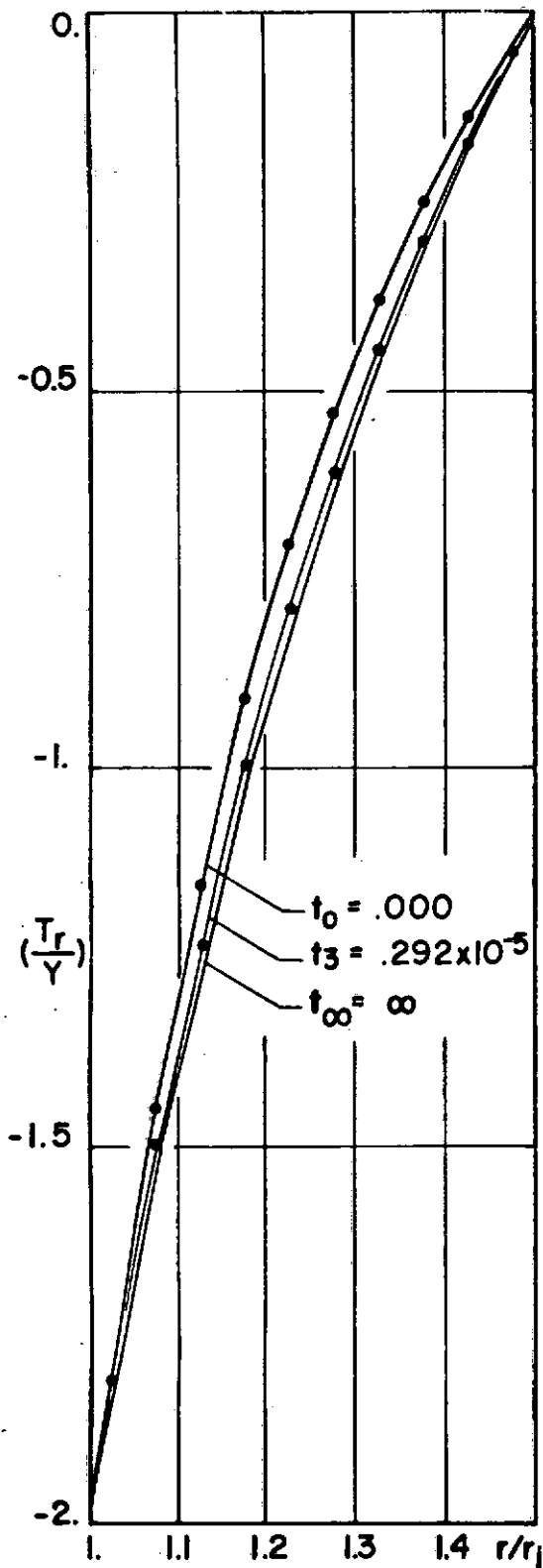


Fig.V.23. Tensión radial en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Elasto/viscoplasticidad, ley de Hohenemser-Prager.

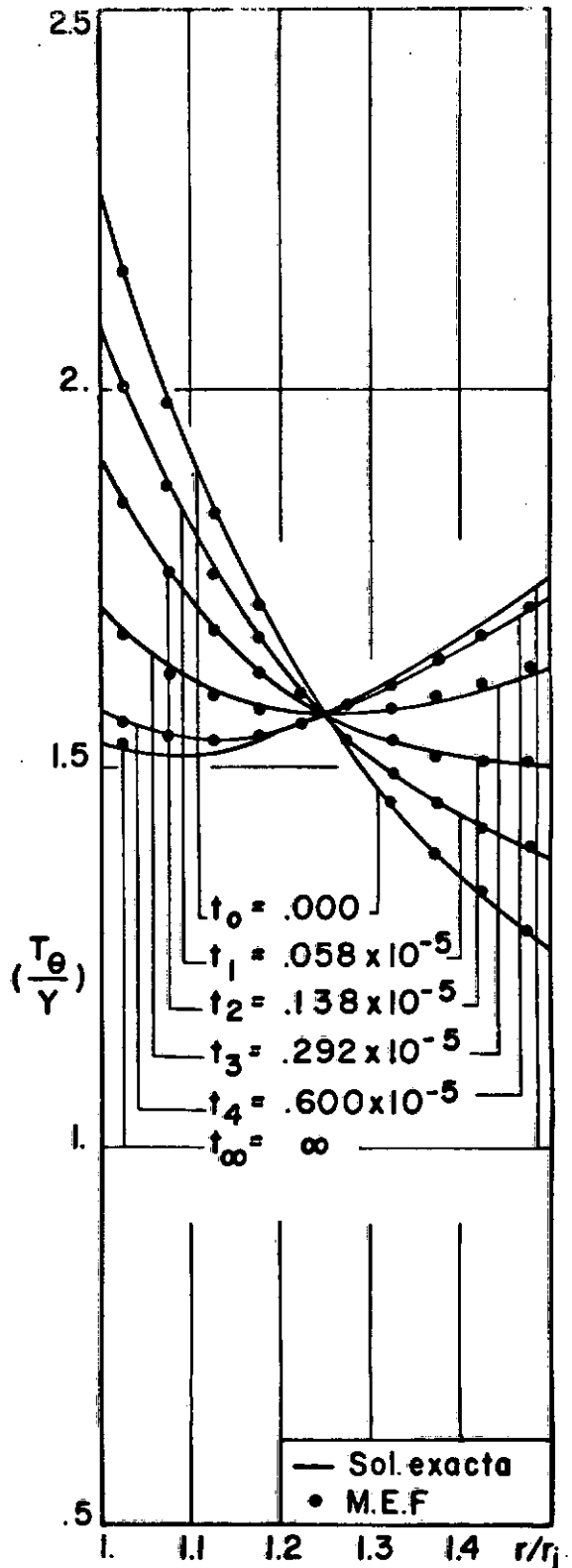


Fig.V.24. Tensión circunferencial en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Elasto/viscoplasticidad, ley de Hohenemser-Prager.

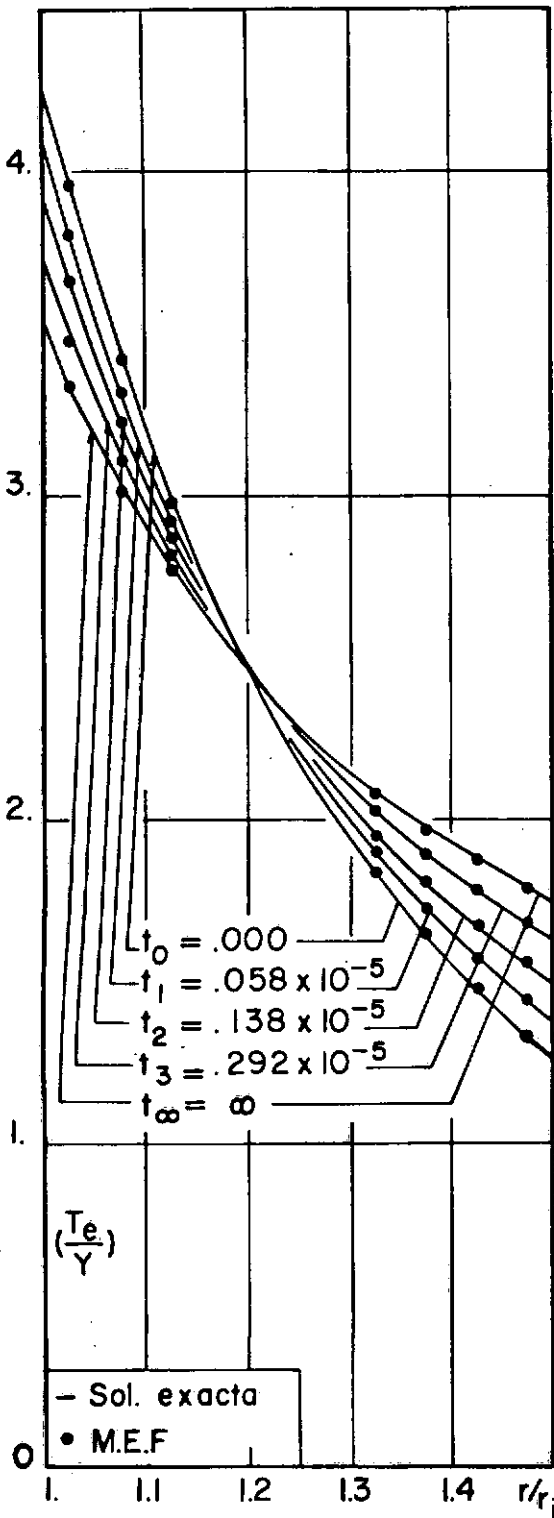


Fig.V.25. Tensión efectiva en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Elasto/viscoplasticidad, ley de Hohenemser-Prager.

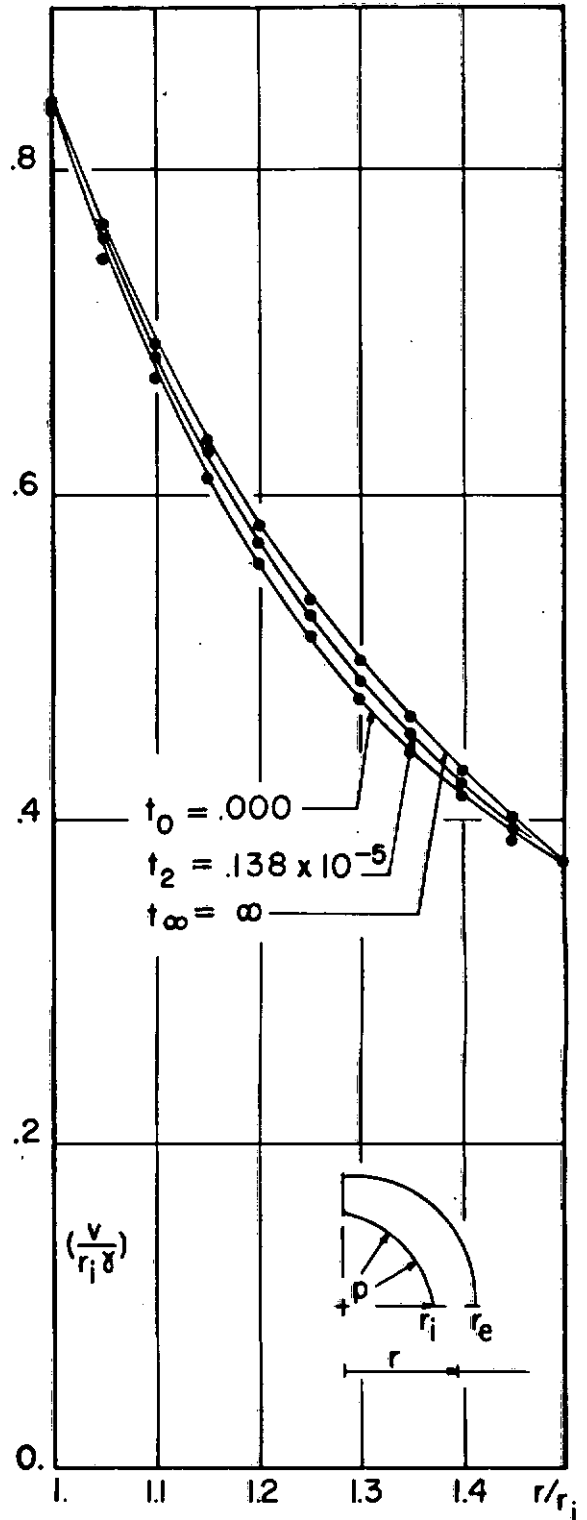


Fig.V.26. Velocidad en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Elasto/viscoplasticidad, ley de Hohenemser-Prager.

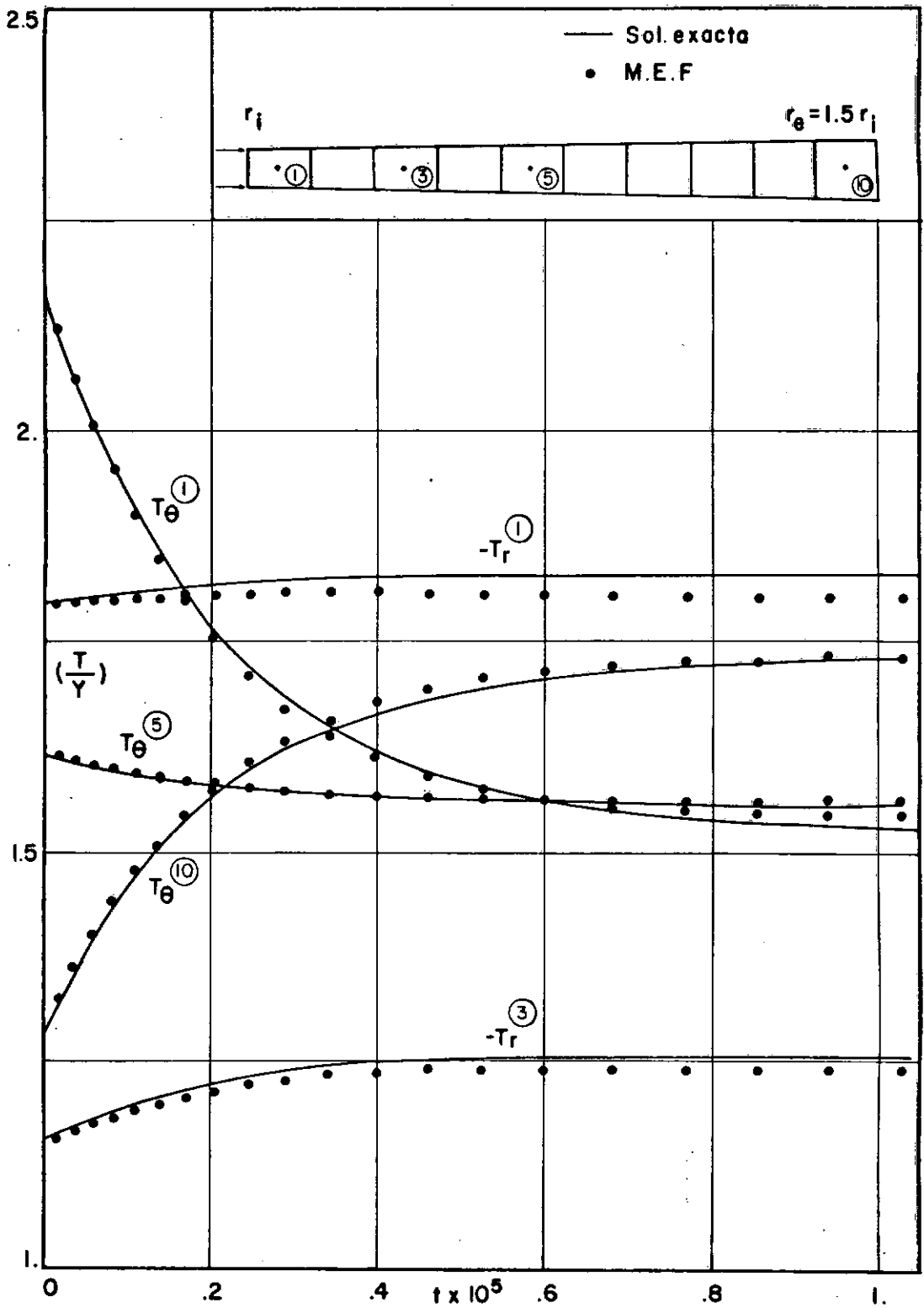


Fig.V.27. Tensiones circunferenciales y radiales en esfera hueca con presión interna, relación de radios $r_e/r_i=1.5$. Elasto/viscoplasticidad, ley de Hohenemser-Prager.

BIBLIOGRAFIA

- [1] KACHANOV, L.M. - Foundations of the theory of plasticity, North-Holland, 1971.
- [2] MARTIN, J.B. - Plasticity: fundamentals and general results , Mit Press, 1975
- [3] HILL, R. - The mathematical theory of plasticity , Clarendon Press, 1950.
- [4] MALVERN, L. E. - Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice Hall, 1969.
- [5] FEIJÓO, R. y TAROCO, E. - Introducción a plasticidad y su formulación variacional , II Escola de Mat. A plicada, LAC.CBPF., 1980.
- [6] PRAGER, W. and HODGE, P.G. - Theory of perfectly plastic Solids , John Wiley, 1951.
- [7] HOFFMAN, O. and SACHS G. - Introduction to the theory of plasticity for engineers , Mc Graw-Hill , 1953.
- [8] FLUGGE, Wilhelm - Viscoelasticity , Springer-Verlag , 1975.
- [9] FINDLEY, W.N.; LAI, J.S. and ONARAN, K. - Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, North-Holland, 1976.
- [10] LIN, T.H. - Theory of inelastic structures , John Wiley and Sons, 1968.
- [11] SUTHERLAND, W.H. - AXICRP - Finite element computer code for creep analysis of plane stress, plane

strain and axisymmetric bodies, Nuclear Engineering and Design ,11, 269, 1970.

- [12] ANDRADE, E.N. - On the viscous flow in metals, and allied phenomena, Proc. of the Royal Society, A 84, 1, 1910.
- [13] ANDRADE, E.N. - The flow in metals under large constant stresses, Proc. Roy. Soc. A 90, 329, 1914.
- [14] NORTON, F.H. - Creep of steel at high temperatures , McGraw-Hill, New York, 1929.
- [15] ODQVIST, F.K.G. - From Stanford 1960 to Gothenburg 1970, IUTAM Symposium on Creep in Structures, Gothenburg 1970, Proceedings, Editor: Jean Hult , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York , 1972.
- [16] HAUPT, P - Some comments on thermomechanical constitutive equations for inelastic analysis of LMFBR components , Transactions of the 4th. International Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California 1977.
- [17] GREENBAUM, G.A. and RUBINSTEIN, M.F. - Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements, Nuclear Engineering and Design, 7, 379, 1968.
- [18] SODERBERG, C.R. - The interpretation of creep tests for machine design, Trans. ASME,58, 733, 1936.
- [19] NADAI, A. - The influence of time upon creep, the hyperbolic sine law , S. Timoshenko Anniversary Volume, MacMillan, New York, 155, 1938.
- [20] HOFF, N.J. - Mechanics applied to creep testing, Soc.for Experimental Stress Analysis, Proceedings, Vol.

XVII,1, 1958.

- [21] PAO, Y.H.; MARIN, J. - An analytical theory of creep deformation of materials , J. Appl. Mech., 20, 245 , 1953.
- [22] BAILEY, R.W. - Creep of Steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plants , Trans. World Power Conf. Tokyo, Vol.3, 1089, 1929.
- [23] BAILEY, R.W. - The utilization of creep test data in engineering design , Proceedings of Inst. of Mech. Engineers, London, Vol. 131, 260, 1935.
- [24] WAHL, A.M. - Analysis of creep in rotating disks based on the Tresca criterion and associated flow rule , J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.78, 231, 1956.
- [25] COFFIN, Jr.L.F.; SHEPLER, P.R.; CHERNIAK, G.S. - Primary creep in design of internal pressure vessels , J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.71, 229, 1949.
- [26] PRAGER, W. - Strain hardening under combined stresses , J. Appl. Phy., Vol.16, 837, 1945.
- [27] TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J.N. - Theory of Elasticity , McGraw-Hill, N.Y., 1951.
- [28] D'ISA, F.A. - Mechanics of Metals , Addison-Wesley Pub. Co., 1968.
- [29] WEIR, C.D. - The creep of thick tubes under internal pressure , J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.80, 464, 1958.
- [30] WAHL, A.M.; SANKEY, G.O.; MANJOINE, M.J.; SHOEMAKER, E. - Creep tests of rotating disks at elevated temper -

ature and comparison with theory, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.76, 225, 1954.

- [31] WAHL, A.M. - Stress distributions in rotating disks subjected to creep at elevated temperature , J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.78, 299, 1956.

- [32] KACHANOV, L.M. - Analytical methods of creep design, specially within the nonlinear range , High Temperature Structures and Materials, Proc. of the third Symposium of Naval Structural Mechanics, Columbia University, 1963, Pergamon Press, 1964.

- [33] ZIENKIEWICS, O.C.; GODBOLE, P.N. - Viscous, incompressible flow with special reference to non-Newtonian (plastic) fluids", Finite Element Method in Flow Problems (Edited by R.H. Gallagher et.al), Chap.2, Wiley, New York, 1975.

- [34] FEIJÓO, R.A. - Introducción a mecánica del continuo , I Escola de Matemática Aplicada, Laboratorio de Cálculo, CBPF, Rio de Janeiro, 1978.

- [35] COIMBRA, A.L. - Lições de mecânica do contínuo, Blucher Ltda. , São Paulo, 1978.

- [36] PRAGER, W. - Introduction to mechanics of continua, Ginn and Company, Boston, 1961.

- [37] APPLEBY, E.J.; PRAGER, W. - A problem in visco-plasticity, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 29, 381 , 1962.

- [38] MALVERN, L.E. - The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol.18, 203, 1951.

- [39] MALVERN, L.E. - Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect, Quart. Appl. Math. 8, 405, 1951.
- [40] PERZYNA, P. - The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Quart. Appl. Math., 20, 321, 1963.
- [41] PERZYNA, P. - Fundamental problems in viscoplasticity, Recent Advances in Applied Mechanics, Acad. Press, New York, Vol. 9, 243, 1966.
- [42] CLARK, D.S.; DUWEZ, P.E. - The influence of strain rate on some tensile properties of steel, Proc. Amer. Soc. Testing Materials, 50, 1950.
- [43] HADDOW, J.B. - A linearized theory of visco-plasticity, Int. J. Solids Structures, Vol. 3, 533, 1967.
- [44] CAMPBELL, J.D. and DUBY, J. - The yield behavior of mild steel in dynamic compression, Proc. Roy. Soc., A 236, 24, 1956.
- [45] KELLY, J.N. - Strain rate sensitivity and yield point behavior in mild steel, Int. J. Solids Structures, Vol. 3, 521, 1967.
- [46] NAGHDI, P.M. and MURCH, S.A. - On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 30, 321, 1963.
- [47] FREUDENTHAL, A.M. - The mathematical theories of the inelastic continuum, Handbuch der Physik VI, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [48] WASHIZU, K. - Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon, New York, 1968.

- [49] WIERZBICKI, T. - A thick-walled elasto-visco-plastic spherical container under stresses and displacement boundary conditions, Arch.Mech, Stos., 15, 297, 1963.
- [50] WIERZBICKI, T. - Impulsive loading of a spherical container with rigid-plastic and strain-rate sensitive material, Arch. Mech. Stos., 15, 775, 1963.
- [51] WIERZBICKI, T. - On the impulsive loading of a spherical vessel, Bull. Acad. Pol. Sci., 12, 217, 1964.
- [52] GELFAND, I.M. and FOMIN, S.V. - Calculus of Variations , Prentice-Hall, 1963.
- [53] NGUYEN, Q.S.; ZARKA, J. - Quelques méthodes de résolution numérique en plasticité classique et en viscoplasticité, Plasticité et viscoplasticité, Ediscience/McGraw, 327, 1974.
- [54] ZIENKIEWICZ, O.C. - The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971.
- [55] ODEN, J.T. - Finite elements of nonlinear continua , McGraw-Hill, 1972.
- [56] ZIENKIEWICZ, O.C. - Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids, a unified numerical solution approach, Int.J.Num.Meth.Engng. , Vol.8, 821, 1974.